

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

УДК 514.142.2
Г 73

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
закладів вищої освіти
(протокол № 5 від 25.04.2024).*

Рецензенти:

В. В. Лобода – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

В. Б. Говоруха – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський державний аграрно-економічний університет).

Автори: В.Ф. Сторчай, Н.П. Уланова, В.В. Приходько, Ю.М. Головка.

Г 73 **Готуємося до олімпіади. Аналітична геометрія** [Електронний ресурс] : навч. посіб. / В.Ф. Сторчай, Н.П. Уланова, В.В. Приходько, Ю.М. Головка ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 165 с.

Викладено методи розв’язування олімпіадних задач з аналітичної геометрії. Призначено для підготовки студентів до участі в математичних змаганнях. Містить нестандартні задачі вищого рівня складності порівняно з опублікованими в популярних підручниках на зазначену тематику. Розв’язування деяких задач потребує поєднання методів аналітичної геометрії з матеріалами математичного аналізу, лінійної алгебри та інших розділів дисципліни «Вища математика». Матеріал посібника розподілено на 6 розділів за належністю до окремих тем. До всіх задач додаються вказівки. Розділ «Відповіді» включає повний опис розв’язування кожної задачі.

Для здобувачів ступеня бакалавра природничих та інженерних спеціальностей університету.

УДК 514.142.2

© В.Ф. Сторчай, Н.П. Уланова,
В.В. Приходько, Ю.М. Головка, 2024
© НТУ «Дніпровська політехніка», 2024

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1. Теоретичні відомості та задачі	5
1.1. Пряма на площині	5
1.2. Криві другого порядку	7
1.3. Задачі про дотичні	17
1.4. Задачі з параметрами	19
1.5. Площина. Пряма у просторі. Поверхні	20
1.6. Задачі різного змісту	28
2. Вказівки	29
3. Відповіді	40
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	163

ВСТУП

Важливість вивчення аналітичної геометрії для фахівців у галузях природничих та інженерних спеціальностей зумовлена надзвичайною широтою застосування цього математичного розділу. Методи аналітичної геометрії використовуються в багатьох розділах математики, а також у фізиці, техніці, програмуванні та в інших сферах. Це стосується також аспектів такого використання :

- важливі для роботи систем глобального позиціонування (GPS) та супутникової навігації;
- як основа створення тривимірних зображень та анімацій у комп'ютерній графіці;
- у сфері статистики і регресійного аналізу даних та ін.

Отже, розширення та поглиблення знань цього розділу математики сприяє успішній діяльності перелічених галузей, науки та виробництва.

Навчальний посібник належить до серії «Готуємося до олімпіади», він буде корисним студентам у підготовці до участі в математичних змаганнях. Теоретичною основою посібника є дещо розширене подання матеріалу розділу «Аналітична геометрія» дисципліни «Вища математика».

З огляду на особливість застосування в посібнику подано задачі вищого рівня складності, на відміну задач цієї тематики, які можна знайти в популярних підручниках для студентів. Також треба зауважити їхню нестандартність. У розв'язуванні певної частини задач мають бути використані матеріали інших розділів вищої математики, зокрема лінійної алгебри і математичного аналізу. В цілому робота над задачами підвищеної складності сприятиме неформальному опануванню математичних знань, розвитку логічного мислення, самостійному конструюванню алгоритмів розв'язування нестандартних задач.

Структура посібника: подання умов задач відповідає окремим розділам аналітичної геометрії з розглядом потрібних теоретичних відомостей. Далі розміщені вказівки для роботи над задачами та відповіді у вигляді повного опису розв'язування кожної задачі.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ЗАДАЧІ

1.1. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Різні види рівнянь прямої на площині

Пряма на площині в декартовій прямокутній системі координат може бути задана одним з наступних видів рівнянь:

- 1) $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої, вектор $\vec{N} = (A; B)$ перпендикулярний до прямої і називається нормальним вектором прямої;
- 2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{N}$;
- 3) $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом ($k = \operatorname{tg} \alpha$). Кут α , що відраховується від додатного напрямку осі Ox до прямої проти ходу годинникової стрілки, називається кутом нахилу прямої. Число b визначає величину відрізка, який пряма відтинає на осі Oy ;
- 4) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k ;
- 5) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$;
- 6) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – рівняння прямої у відрізках на осях, де a і b – відрізки, які пряма відтинає на осях Ox і Oy відповідно;
- 7) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{S} = (m; n)$;
- 8) $\left. \begin{array}{l} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{array} \right\}, t \in (-\infty; \infty)$ – параметричне рівняння прямої, яке у векторній формі має вигляд $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S} \cdot t$;
- 9) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ – нормальне рівняння прямої, де $p > 0$ – довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на пряму, α – кут нахилу цього перпендикуляра до осі Ox .

Загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ зводиться до нормального вигляду шляхом множення на нормувальний множник

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

C в загальному рівнянні прямої.

Якщо пряма l задана рівнянням 9), а $M(x; y)$ – деяка точка площини, то вираз

$$\delta(M, l) = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$$

задає відхилення точки M від прямої l .

За знаком $\delta(M, l)$ можна визначити взаємне розташування точки M , прямої l і початку координат: якщо точка M і початок координат лежать по різні боки від прямої l , то $\delta(M, l) > 0$, а якщо точка M і початок координат знаходяться по один бік від прямої l , то $\delta(M, l) < 0$.

Відстань від точки M до прямої l дорівнює $\rho(M, l) = |\delta(M, l)|$.

Якщо сторони кута задані рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то рівняння бісектрис знаходять за формулою

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Задачі

1.1.1. Сторони чотирикутника лежать на прямих: $ax + by + c_1 = 0$, $bx - ay + c_2 = 0$, $ax + by + c_3 = 0$, $bx - ay + c_4 = 0$, причому $c_1 \neq c_3$, $c_2 \neq c_4$. Довести, що його площу S можна обчислити за формулою

$$S = \frac{|(c_1 - c_3)(c_2 - c_4)|}{a^2 + b^2}.$$

1.1.2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 3)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 12 кв.од.

1.1.3. Дано вершина $(0; 0)$ рівнобедреного трикутника, рівняння його основи $2x - y - 10 = 0$ і його площа $S = 20$. Скласти рівняння бічних сторін.

1.1.4. Кінці основи рівнобедреного трикутника знаходяться у точках $A(-3; 4)$, $B(6; -2)$, тангенс кута при основі дорівнює $\frac{3}{2}$. Знайти координати вершини C , якщо відомо, що початок координат і точка C лежать по різні сторони від прямої (AB) .

1.1.5. Дано рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $3x + y = 0$ і $x - 3y = 0$ та точка $(5; 0)$ на його основі. Знайти площу трикутника.

1.1.6. Записати рівняння сторін прямокутника, якщо відомі рівняння його діагоналей

$$l_1: 7x - y + 4 = 0, \quad l_2: x + y - 2 = 0$$

і точка $A(3; 5)$, яка лежить на одній з його сторін.

1.1.7. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо дві з них проходять через вершину $O(0; 0)$, а на двох інших сторонах лежать точки $(3; 1)$ і $(8; 6)$. Чому дорівнює площа S квадрата?

1.1.8. Через точку $A(2; 4)$ провести пряму так, щоб відрізок її між прямими $x + 2y - 13 = 0$ і $2x + y - 11 = 0$ ділився в ній навпіл.

1.1.9. Знайти вершини трикутника, якщо відомо, що його площа дорівнює 12, а його висоти лежать на прямих $y = 0$, $y = -x$, $y = 2x$.

1.1.10. Дано трикутник з вершинами $A(-4; -5)$, $B(1; 5)$, $C(4; -1)$. Знайти відстань вершини C до бісектриси кута A .

1.1.11. Задано рівняння сторони трикутника $x + 7y - 6 = 0$ і рівняння бісектрис $x + y - 2 = 0$ і $x - 3y - 6 = 0$, що виходять з кінців цієї сторони. Знайти координати вершини, що протилежна даній стороні.

1.1.12. Скласти рівняння сторін трикутника $\triangle ABC$, якщо дано одну з його вершин $A(4; -1)$ і рівняння бісектрис $x - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

1.1.13. Задано рівняння двох сторін ромба $2x + y - 5 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$ і одна з його вершин $(3; 5)$. Знайти площу S ромба.

1.1.14. Задано рівняння прямої (MN) $2x + y - 1 = 0$ і дві точки $A(4; 3)$, $B(-2; -1)$.

1). Довести, що A і B лежать по різні сторони від прямої (MN) .

2). Знайти на (MN) таку точку C , щоб були рівні кути $\angle MCA = \angle MCB$.

1.2. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Коло

1) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – канонічне рівняння кола, що має центр у точці $C(x_0; y_0)$ і радіус R ;

2) $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ – загальне рівняння кола;

3) $x = x_0 + R \cos t$, $y = y_0 + R \sin t$ – параметричні рівняння кола.

Еліпс

Канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $a > b > 0$.

Параметри a і b – півосі еліпса (велика і мала відповідно), точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ – його вершини, осі симетрії Ox і Oy – головні осі, центр симетрії O – центр еліпса.

Точки $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ – фокуси еліпса ($c = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$). Якщо $M(x; y)$ – довільна точка еліпса, то $r_1 = |F_1M|$ і $r_2 = |F_2M|$ – фокальні радіуси точки M .

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($0 < \varepsilon < 1$) – ексцентриситет еліпса, $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$ – фокальні радіуси точки еліпса з абсцисою x . Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – директриси еліпса.

Еліпс з центром в точці $C(x_0; y_0)$ задається рівнянням $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Гіпербола

Канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $a > b > 0$.

Параметри a і b – півосі гіперболи (дійсна і уявна відповідно), точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ – його вершини, осі симетрії Ox і Oy – дійсна і уявна, точка $O(0; 0)$ – центр гіперболи.

Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоти гіперболи.

Точки $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ – фокуси гіперболи ($c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$). Якщо $M(x; y)$ – довільна точка гіперболи, то $r_1 = |F_1M|$ і $r_2 = |F_2M|$ – фокальні радіуси точки M .

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($1 < \varepsilon < \infty$) – ексцентриситет гіперболи, $r_1 = |a - \varepsilon x|$,

$r_2 = |a + \varepsilon x|$ – фокальні радіуси точки гіперболи з абсцисою x .

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – директриси гіперболи.

Гіпербола $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ називається спряженою з гіперболою.

Якщо $a = b$, то гіпербола $x^2 - y^2 = 1$ називається рівносторонньою. Рівняння її асимптот $y = \pm x$.

Гіпербола з центром в точці $C(x_0; y_0)$ задається рівнянням $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, її асимптоти $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$.

Парабола

Парабола з вершиною в початку координат, симетрична відносно осі Ox , має канонічне рівняння

$$y^2 = 2px,$$

де $p > 0$ – параметр параболи, вісь Ox – вісь параболи, точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус

параболи, пряма $x = -\frac{p}{2}$ – директриса параболи. Вектор $\overline{FM}$ називається

фокальним радіус-вектором, а число $r = |\overline{FM}|$ – фокальним радіусом точки M

параболи, $r = x + \frac{p}{2}$.

Парабола з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі Oy , має канонічне рівняння

$$x^2 = 2py,$$

де $p > 0$ – параметр параболи, вісь Oy – вісь параболи, точка $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ – фокус

параболи, пряма $y = -\frac{p}{2}$ – директриса параболи. Вектор $\overline{FM}$ – фокальний

радіус-вектор, число $r = |\overline{FM}|$ – фокальний радіус точки M , $r = y + \frac{p}{2}$.

Рівняння параболи з вершиною в точці $C(x_0; y_0)$ і віссю симетрії $x = x_0$ має вигляд $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Задачі

1.2.1. Дано рівнобедрений трикутник $\triangle ABC$ з вершиною у точці $A(4; 6)$. Точка $M(5; 7)$ лежить на одній з бічних сторін, $x - 2y + 12 = 0$ – рівняння основи трикутника. Скласти рівняння кола, що описано навколо $\triangle ABC$.

1.2.2. Скласти рівняння геометричного місця точок площини, з яких відрізок $[-1; 1]$ осі Oy видно під кутом 45° .

1.2.3. Гіпотенуза прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = \pi / 2$) лежить на осі Oy , один з катетів задано рівнянням $x - 2y + 2 = 0$, а точка $M(1; -2)$ лежить на іншому катеті. Скласти рівняння описаного навколо $\triangle ABC$ кола.

1.2.4. Точка $C(3; -1)$ є центром кола, що відтинає від прямої $2x - 5y + 18 = 0$ хорду, довжина якої дорівнює 6. Скласти рівняння кола.

1.2.5. Дано рівняння двох сторін ромба $x + 2y - 7 = 0$, $13 - x - 2y = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $x - y + 2 = 0$. Скласти рівняння вписаного в ромб кола.

1.2.6. Точка $A(2; 2)$ – вершина рівнобедреного трикутника $\triangle ABC$, пряма $2x - y = 0$ є його основою BC , а точка $N(0; 6)$ лежить на прямій (AB) . Скласти рівняння кола, вписаного в $\triangle ABC$.

1.2.7. Знайти спільні дотичні до двох кіл, центри яких знаходяться в точках $O_1(1; 1)$ і $O_2(2; 3)$, а радіуси відповідно дорівнюють 2 і 4.

1.2.8. Скласти рівняння геометричного місця точок площини, що розташовані від точки $A(x_1; y_1)$ на відстані, вдвічі більшій, ніж від точки $B(x_2; y_2)$.

1.2.9. Знайти площу фігури, заданої на координатній площині системою нерівностей:

1) $x^2 + y^2 \leq 6x - 4y - 11$ і $x \geq 2$;

2) $x^2 + y^2 \leq 6x - 4y - 11$ і $x + y \leq 2$.

1.2.10. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника зі сторонами: $x + 2y - 9 = 0$, $2x - y + 2 = 0$, $x + 1 = 0$.

1.2.11. Скласти рівняння кола:

1) з центром, що лежить на прямій $2x + y = 0$, і яке дотикається до прямих $4x - 3y - 10 = 0$ і $4x - 3y - 30 = 0$;

2) яке дотикається до прямих: $y = 0$, $y = 6$, $3x - 4y + 8 = 0$.

1.2.12. На площині задано дві точки $A(-1; -1)$, $B(3; 2)$ і взята точка $C(x; y)$ на кривій $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 4 = 0$. Яке найбільше значення може мати площа $\triangle ABC$? Знайти координати точки C .

1.2.13. На площині дано дві точки A і B . Знайти геометричне місце точок, які розташовані від точки A на відстані вдвічі більшій, ніж від B .

1.2.14. Коло вписано: 1) в квадрат; 2) в правильний трикутник. Довести, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до вершини відповідної фігури стала. Знайти ці сталі.

1.2.15. Вершина трикутника, що має нерухому основу, переміщується на площині так, що його периметр залишається постійним. Знайти траєкторію вершини, якщо основа дорівнює 12, а периметр – 32.

1.2.16. Знайти геометричне місце точок, з яких еліпс видно під прямим кутом.

1.2.17. На еліпсі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ знайти таку точку $(x_0; y_0)$, щоб площа трикутника, обмеженого дотичною до еліпса в цій точці і осями координат, була найменшою.

1.2.18. Відрізок $[AB]$ довжини 3 ковзає своїми кінцями по координатних осях (A – по Oy , B – по Ox). Яку траєкторію описує точка C , що знаходиться на відрізку на відстані 1 від вершини A ?

1.2.19. Довести, що добуток відстаней від фокусів до будь-якої дотичної до еліпса дорівнює квадрату малої півосі.

1.2.20. Довести, що для еліпса з півосями a і b ($a > b$) відстань між будь-якими його двома точками не перевищує $2a$.

1.2.21. Парабола $y^2 = 2px$ перетинає коло $x^2 + y^2 + 4x - 144 = 0$ в точках A і B . За умови, що трикутник $\triangle AOB$ (O – початок координат) правильний, знайти значення параметра p ($p > 0$) і записати рівняння параболи.

1.2.22. Автомобільний ліхтар має вигляд параболічного рефлектора. Де знаходиться фокус параболи осьового перерізу рефлектора з діаметром 7,5 см і глибиною 5 см?

1.2.23. Дві вершини трикутника зафіксовані в точках $A(-1; 0)$ і $B(1; 0)$, а третя (точка C) рухається по параболі $y = x^2 - 6x + 15$. Запишіть рівняння кривої, яку описує центр ваги трикутника.

1.2.24. Дві вершини квадрата лежать на осі абсцис, а дві інші – на кривій:

$$1) y = x - x^2; \quad 2) y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > b).$$

Знайти площу квадрата.

1.2.25. Знайти найбільший радіус кола, що лежить всередині параболи $y^2 = 4x$ і дотикається до вершини параболи.

1.2.26. Знайти координати точки M_0 прямої (l) , найближчої до кривої (L) , та найкоротшу відстань від M_0 до (L) :

$$1) (l): 3x - 4y + 23 = 0, (L): x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0;$$

$$2) (l): x + y + 5 = 0, (L): y^2 = 16x;$$

$$3) (l): 2x - 3y + 25 = 0, (L): \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

1.2.27. Дано еліпс $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ і пряма $Ax + By + C = 0$. Знайти необхідні і достатні умови того, що пряма перетинає еліпс, дотикається до нього, проходить поза еліпсом.

1.2.28. Написати рівняння дотичних до еліпса $3x^2 + y^2 = 3$, паралельних прямій $x + y = 5$.

1.2.29. Написати рівняння дотичних до еліпса $3x^2 + 8y^2 = 45$, відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

1.2.30. Еліпс з фокусами в точках $(-3; 0)$, $(3; 0)$ дотикається до прямої $y = 5 - x$. Скласти рівняння еліпса.

1.2.31. Знайти спільні дотичні до двох еліпсів

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

1.2.32. Знайти рівняння сторін квадрата, описаного навколо еліпса

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

1.2.33. Дано параболу $y^2 = 2px$ ($x^2 = 2py$) і пряму $y = kx + b$. За умови $p > 0$ вивести необхідні і достатні умови того, що пряма перетинає параболу, дотикається до неї, проходить поза нею.

1.2.34. Нехай A і B – точки на параболі такі, що дотичні до параболі, проведені в цих точках, взаємно перпендикулярні. Чи залежить добуток відстаней від точок A і B до осі параболі від вибору цих точок?

1.2.35. Знайти рівняння еліпса з вершинами $(0; 6)$ і $(0; -2)$, якщо відомо, що на осі Ox еліпс відтинає хорду довжиною 6.

1.2.36. Записати рівняння еліпса, що перетинає вісь Ox в точках $(4; 0)$ і $(10; 0)$ і дотикається до осі Oy у точці $(0; 2)$, якщо осі еліпса паралельні осям координат.

1.2.37. Записати рівняння рівносторонньої гіперболи, одна з вершин якої знаходиться в точці $(2; 2)$, дійсна вісь паралельна осі Oy за умови, що на осі Ox гіпербола відтинає хорду довжиною 8.

1.2.38. Прямі $x = a$ і $y = kx + b$ є асимптотами гіперболи, яка проходить через точку $(x_0; y_0)$. Скласти рівняння гіперболи.

1.2.39. Довести, що крива $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$ – гіпербола. Знайти її асимптоти і побудувати гіперболу.

1.2.40. Знайти рівняння лінії другого порядку, для якої вісь Ox є віссю симетрії, а вісь Oy – дотичною до вершини, якщо відомо, що лінія проходить через дві точки:

$$1) (2; 4) \text{ і } (4; -4); \quad 2) (2; 12) \text{ і } (-6; -12).$$

1.2.41. Довести, що хорди, які з'єднують точки перетину кола $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ з осями координат, дотикаються до еліпса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

1.2.42. Вісь симетрії параболі паралельна осі ординат, а рівняння директриси $y - 10 = 0$. Записати рівняння параболі, якщо вона перетинає вісь Ox у точках $(-5; 0)$ і $(11; 0)$.

1.2.43. Директриса параболі перетинає еліпс $9x^2 + 20y^2 = 324$ у точках $(-4; 3)$ і $(4; 3)$, а відстань від цих точок до фокуса параболі дорівнює $2\sqrt{5}$. Скласти рівняння параболі.

1.2.44. Записати рівняння кола, радіус якого дорівнює 2, якщо відомо, що коло проходить через вершину кривої $x^2 - 2x - y + 2 = 0$, а центр кола лежить на прямій $x + y = 0$.

1.2.45. Для кожного $a > 0$ знайти рівняння всіх прямих, які проходять через початок координат і мають рівно дві спільні точки з графіком функції

$$f(x) = x|x + 2a| + a^2.$$

1.2.46. На площині дві параболи розташовані так, що їхні осі взаємно перпендикулярні, а самі параболи перетинаються в чотирьох точках. Довести, що ці чотири точки лежать на одному колі.

1.2.47. Знайти геометричне місце точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівняння

$$\left(1 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^2 + (y - x^2)^2(y + |x|)^2}\right)^2 + \\ + \left(x^2 + y^2 - 1/4 - \sqrt{(x^2 + y^2 - 1/4)^2 + (y - x^2)^2(y + |x|)^2}\right)^2 = 0.$$

1.2.48. Для кожної параболи $y = x^2 + px + q$, графік якої перетинає осі координат у трьох різних точках, проведено коло через ці три точки. Довести, що існує точка, через яку проходить кожне з таких кіл.

1.2.49. На площині xOy вказати всі точки, через які не проходить жодна з кривих сімейства $y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3$, де p – параметр.

1.2.50. Знайти найкоротшу відстань між точками параболи $y = x^2 - 8x + 16$ і прямої $y = -2x + 1$.

1.2.51. Знайти найкоротшу відстань від точки $M_0(4; 0)$ до параболи $y^2 = 4x$ і координати точки параболи, найближчої до M_0 .

1.2.52. Числа x і y задовольняють нерівності:

$$1) x^2 - 6x + y^2 - 8y - 11 \leq 0 \text{ і } x^2 - 4x + y^2 - 5 \leq 0; \quad 2) x^2 \leq y \leq 9 + \sqrt{9 - x^2}.$$

Які значення може приймати сума $U = 6x + 8y$?

1.2.53. Дано еліпс $x^2 + 4y^2 = 5$ і дві точки $A(2; 2)$, і $B(-2; 1)$. Знайти координати такої точки C еліпса, щоб площа S трикутника ABC була мінімальною.

1.2.54. На параболі $y = x^2$ знайти точки, відстань від яких до прямої $4x + 3y + 5 = 0$ дорівнює $\delta = 0,8$. Якою повинна бути ця відстань, щоб точка була єдиною?

1.2.55. На кривій $xy = 1 + x$ знайти точку M найближчу до точки $A(0; 1)$

1.2.56. Прямокутний трикутник з катетами a і b ковзає їхніми кінцями по осях координат. Знайти геометричне місце вершин прямого кута.

1.2.57. З початку координат проведено всілякі хорди кола $(x_1 - a)^2 + y_1^2 = a^2$. Знайти геометричне місце середин цих хорд.

1.2.58. Знайти геометричне місце середин хорд:

1) круга $x^2 + y^2 \leq a^2$, які проходять через точку $P(c; 0)$, $0 < c < a$;

2) гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$, які проходять через її правий фокус.

1.2.59. Знайти множину середин відрізків, кінці яких лежать на різних діагоналях квадрата.

1.2.60. Знайти множину точок M , різниця квадратів відстаней яких до двох заданих точок A і B дорівнює заданій величині a .

1.2.61. Коло K радіуса R і пряма l розташовані в одній площині. Відстань від центра кола K до прямої l дорівнює a ($R < a$). Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються кола K і прямої l .

1.2.62. Координати $(x; y)$ точки M задовольняють рівняння $y - x = \sqrt{x + y - 2xy}$, а координати точки N – рівняння $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$. Знайти найбільше і найменше значення довжини відрізка MN .

1.2.63. Є два концентричних кола радіусів a і b , причому $a > b$. Із центра кіл проведемо довільний промінь. Через точку перетину променя з колом меншого радіуса проведемо горизонталь, а через точку перетину з колом більшого радіуса – вертикаль. Проведені горизонталь і вертикаль перетинаються в точці C . Яку множину точок утворюють усі точки?

1.2.64. На гіперболі $y = \frac{1}{x}$ взято точки $M(x_0; y_0)$ і $N(-x_0; -y_0)$. Коло з центром у точці M проходить через точку N і перетинає гіперболу ще в трьох точках. Довести, що ці точки є вершинами правильного трикутника.

1.2.65. Скласти рівняння лінії, по якій переміщується середина одиничного відрізка, кінці якого знаходяться на параболі $y = x^2$.

1.2.66. Визначити геометричне місце вершин парабол

$$y = x^2 - \frac{4mx}{m^2 + 1} + \frac{m^4 + 4m^2 + 1}{(m^2 + 1)^2}.$$

1.2.67. Рівняння кривих задані в полярних координатах:

1) $r(5 + 4\cos\varphi) = 9$; 2) $r(4 - 5\cos\varphi) = 9$.

Записати ці рівняння в прямокутних координатах і побудувати криві.

1.2.68. На еліпсі $x^2 + xy + y^2 = 9$ взято дві точки $A(0; 3)$ і $B(3; -3)$. Вказати на ньому таку точку C , щоб площа S трикутника ABC була найбільшою. Знайти цю площу і ексцентриситет еліпса.

1.2.69. Знайти ексцентриситет еліпса, отриманого при перетині прямого кругового циліндра площиною, що проходить під кутом φ до його осі.

1.2.70. Кут між віссю прямого кругового конуса і його твірною дорівнює 30° . Через деяку точку твірної проведена перпендикулярно до неї площина. Знайти ексцентриситет отриманого в перерізі еліпса.

1.2.71. Фокуси еліпса знаходяться в точках $F_1(2; 0)$, $F_2(0; 2)$, а більша вісь дорівнює 4. Скласти рівняння еліпса.

1.2.72. Написати рівняння параболі з вершиною в початку координат, яка проходить через точки $(0; 1)$, $(1; 0)$.

1.2.73. При яких значеннях a і b еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ перетинається з параболою $y^2 = 2px$ під найбільшим кутом?

1.2.74. Через точку P , що лежить на графіку Γ функції $y = x^3$, проведена дотична, яка перетинає Γ в точці $Q \neq P$. Довести, що кутовий коефіцієнт дотичної до Γ в точці Q в чотири рази більше кутового коефіцієнта дотичної в точці P .

1.2.75. Довести, що дотична до графіка функції $xy = a^2$ утворює з осями координат трикутник сталої площі.

1.2.76. Знайти відстань від точки $A\left(0; \frac{9}{2}\right)$ до параболі $y = x^2$.

1.2.77. Знайти рівняння двох паралельних прямих, які дотикаються графіка функції $y = \frac{1}{x}$ і знаходяться одна від одної на відстані 1.

1.2.78. Під яким кутом крива $y = \frac{x^7 + 7x + 1}{7x^6 + 7}$ перетинає вісь Ox ?

1.2.79. Записати рівняння дотичної до графіка парної функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$, якщо відомо, що для всіх дійсних x справедлива рівність $f(2x^3 - x) - 4x^2 f(x^2 - x - 1) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2$.

1.3. ЗАДАЧІ НА ДОТИЧНІ

1). Рівняння дотичної до графіка функції $y = y(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0);$$

2). Рівняння нормалі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

3). Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ у точці $M_0(x_0; y_0)$

визначається рівнянням:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

4). Рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M_0(x_0; y_0)$

має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

5). Дотична до параболи $y^2 = 2px$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ визначається рівністю:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Задачі

1.3.1. Записати рівняння геометричного місця основ перпендикулярів, опущених з вершини параболи $y^2 = -4ax$ на дотичні до цієї параболи, якщо $a > 0$.

1.3.2. Знайти спільні дотичні до кривих $y^2 = \frac{20}{3}x$ та $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$.

1.3.3. Написати рівняння дотичної до параболи $y^2 = 8x$, якщо дотична:

1) відтинає на осях координат рівні відрізки;

2) перпендикулярна прямій $y = 3x + 2$.

1.3.4. Вивести необхідну і достатню умову того, що пряма $y = kx + m$ дотикається до гіперболи, заданої рівнянням:

$$1) \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1; \quad 2) xy = p.$$

1.3.5. Записати рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - y^2 = 16$, проведених з точки $A(-1; -7)$.

1.3.6. Вивести необхідну і достатню умову того, що до гіперболи $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ можна провести дотичні, паралельні прямій $y = kx$.

1.3.7. Знайти рівняння параболи, яка дотикається до еліпса $8x^2 + y^2 = 9$ у двох точках $A(-1; -1)$ і $B(1; -1)$.

1.3.8. Скласти рівняння параболи, що проходить через початок координат і дотикається до прямих $y = 2 \pm x$.

1.3.9. Знайти значення параметрів p і q у рівнянні параболи $y = x^2 + px + q$, при яких вона проходить через точку $A(-1; 0)$ та дотикається до прямої $y = x$.

1.3.10. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = x^2 - 4x + 3$, які проходять через точку $A(2; -5)$.

1.3.11. Задано дві прямі $y = -x$ і $y = 5x - 6$. Знайти значення параметрів a і b , при яких обидві прямі дотикаються до параболи $f(x) = x^2 + ax + b$.

1.3.12. Знайти рівняння спільної дотичної до парабол $y = x^2 + 4x + 8$ і $y = x^2 + 8x + 4$.

1.3.13. Задано параболи $y = x^2$ і $y = x^2 + m$ ($m > 0$). Визначити, у якому відношенні будь-яка хорда першої параболи, що дотикається до другої параболи, поділяється точкою дотику.

1.3.14. Розглядаються всі можливі параболи, вітки яких направлені вниз, симетричні відносно прямої $x = -1$ і дотичні до прямої $6x - y + 3 = 0$. Знайти рівняння тієї з них, яка перетинає вісь Oy в точці з найбільшою ординатою.

1.3.15. Параметри a і b змінюються таким чином, що система рівнянь $y = x^2 + a$ і $x = y^2 + b$ має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$. Яку криву описує точка $M(x_0; y_0)$ при змінюванні a і b ?

1.4. ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

1.4.1. Знайдіть всі значення параметра a для кожного з яких пряма $y = a(x - 2) - 1$ поділяє навпіл периметр фігури, що задана нерівністю $2|x + y| + |x - 2y + 3| \leq 6$.

1.4.2. Знайдіть всі значення a , при кожному з яких лінії $y = a|x - 2| + |a| - 2$ і $y = \frac{a}{2}$ обмежують багатокутник, площа якого не більша за 0,5.

1.4.3. Визначити, при яких значеннях $a \in \mathbb{R}$:

1) точка $M_0(a; -1)$ лежить поза кругом $x^2 - 2x + 2y + y^2 - a - 3 \leq 0$;

2) найкоротша відстань від M_0 до кола дорівнює чотирьом його радіусам та які координати точки, найближчої до M_0 .

1.4.4. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких система рівнянь

$$\begin{cases} y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}, \\ y - ax = 3 - a \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Дати геометричну ілюстрацію.

1.4.5. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких система

$$\begin{cases} \left((x-5)^2 + (y-3)^2 - 9 \right) \left((x-2)^2 + (y+1)^2 \right) \leq 0, \\ y = ax + a + 3 \end{cases}$$

не має розв'язків. Дати геометричну ілюстрацію.

1.4.6. Знайти кількість розв'язків системи $\begin{cases} y = a + 3 + x, \\ \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$ в залежності від

значень параметра a . Дати геометричну ілюстрацію.

1.4.7. Знайдіть всі значення параметра a , при кожному з яких функція $y(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$ має більше двох екстремумів.

1.4.8. Знайдіть усі значення a , при кожному з яких система рівнянь

$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

має рівно чотири розв'язки. Дати геометричну ілюстрацію.

1.4.9. Знайдіть усі значення a , при кожному з яких система рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\left(\sqrt{12-x^2} - y\right)\left((x+4)^2 + (y+4)^2 - 8(x+4) + x^2 - y^2 - 24\right)}{2-x^2} = 0, \\ y = 1 - 2a \end{cases}$$

має рівно два розв'язки. Дати геометричну ілюстрацію.

1.4.10. Визначити, при яких $k \in R$ три прямі перетинаються в одній точці:

1) $(k-1)x - y = 0$, $(k-1)x + y - 2k = 0$, $kx - 4y + 12 - 4k = 0$;

2) $5kx + 3y - 5k = 0$, $3kx + 2y - 3k = 0$, $kx - y - k = 0$.

1.4.11. Зобразити на площині kOb геометричне місце таких точок $M(k; b)$, що пряма $y = kx + b$: 1) не перетинає параболу $x^2 + 2y = 0$; 2) не перетинає еліпс $4x^2 + y^2 = 4$; 3) перетинає гіперболу $x^2 - y^2 + 4 = 0$ і не перетинає параболу $y^2 + 4x = 0$.

1.5. ПЛОЩИНА. ПРЯМА У ПРОСТОРІ. ПОВЕРХНІ

Різні види рівнянь площини

$Ax + By + Cz + D = 0$ – загальне рівняння площини, $\vec{N} = (A; B; C)$ – вектор, перпендикулярний до площини (нормальний вектор).

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ – рівняння площини у відрізках на осях; } a, b, c \text{ – величини}$$

відрізків, які площина відтинає від осей Ox , Oy , Oz відповідно.

Кутові співвідношення для площин

Нехай рівняння площин P_1 і P_2 задані у загальному вигляді $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тоді кут між площинами можна знайти як кут між їх нормальними векторами

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умова паралельності площин $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$

Умова перпендикулярності площин $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

Відстань точки від площини

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Різні види рівнянь прямої у просторі

1) $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ – канонічні рівняння прямої, де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка,

що належить прямій, $\vec{S} = (m; n; p)$ – вектор, паралельний до цієї прямої (напрямний вектор);

2) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$;

3) $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$ – параметричні рівняння прямої, де t – деякий числовий параметр;

- 4) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – загальні рівняння прямої, де $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – рівняння площин, перетин яких утворює пряму у просторі.

Кутові співвідношення для прямих

- 5) Кут φ між прямими $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$

визначається як кут між напрямними векторами заданих прямих:

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

- 6) Умова паралельності прямих $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

- 7) Умова перпендикулярності прямих $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Кут між прямою та площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої й площини

- 8) Гострий кут між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною

$Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

- 9) Умова паралельності прямої і площини: $Am + Bn + Cp = 0$.

- 10) Умова перпендикулярності прямої і площини: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Поверхні

- 11) Рівняння сфери радіуса R з центром в точці $C(x_0; y_0; z_0)$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

- 12) Рівняння кругового конуса з центром в точці $C(x_0; y_0; z_0)$, вісь симетрії якого паралельна осі Oz

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = 1.$$

13) Рівняння еліптичного параболоїда з віссю симетрії Oz і центром в точці $C(x_0; y_0; z_0)$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0.$$

14) Рівняння кругового параболоїда з віссю симетрії Oz і центром в точці $C(x_0; y_0; z_0)$

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = a(z - z_0).$$

15) Рівняння гіперболічного параболоїда з віссю симетрії, паралельною осі Oz і центром в точці $C(x_0; y_0; z_0)$

$$(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = a(z - z_0).$$

Задачі

1.5.1. Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна площині (P) $5x - y + 3z - 2 = 0$ і перетинає її по прямій, розташованій у площині xOy .

1.5.2. Записати канонічне рівняння прямої (l_1) , яка проходить через точку $M_0(3; -2; -4)$, паралельна площині (P) $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає пряму (l) : $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

1.5.3. Трикутник ΔABC , де $A(0; -2; 1)$, $B(-1; -1; -3)$, $C(3; -5; 1)$, проектується на деяку площину у відрізок довжиною $4\sqrt{3}$. Записати рівняння цієї площини, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(2; 2; 2)$.

1.5.4. Точки $A(-3; 0; 3)$ і $B(3; 6; -15)$ – вершини ΔABC , середина сторони AC лежить на прямій $\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}$, а середина BC – на площині $2x - 3y + z + 7 = 0$. Знайти площу S трикутника ΔABC .

1.5.5. Знайти довжину і рівняння висоти CD трикутника ΔABC , якщо $A(5; 2; -1)$, $B(3; 1; 1)$, $C(-1; 4; -4)$.

1.5.6. Через точку $A(4; 0; -1)$ провести пряму так, щоб вона перетинала дві прямі: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+1}{3}$ (l_1) і $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ (l_2) .

1.5.7. Нехай $\overline{S_1}$ і $\overline{S_2}$ – напрямні вектори прямих (l_1) і (l_2) , причому (l_1) і (l_2) не паралельні, а також відомо, що кінці вектора $\overline{R} = \overline{M_1M_2}$ лежать на різних прямих, тобто $M_1 \in (l_1)$, $M_2 \in (l_2)$. Довести твердження:

1) прямі є мимобіжними, якщо $\overline{S_1} \overline{S_2} \overline{R} \neq 0$;

2) найкоротшу відстань між (l_1) і (l_2) можна знайти за формулою $d = \left| \overline{R} \cdot \overline{N^0} \right|$, де $\overline{N^0}$ – орт вектора $\overline{N} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$.

1.5.8. Знайти відстань між діагоналями куба, які не перетинаються.

1.5.9. Знайти відстань між прямими $x = y = z$ і $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$

1.5.10. Знайти відстань між прямими $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-2}{4}$ і $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$ та рівняння спільного перпендикуляра до них.

1.5.11. В кубі з ребром $a = 1$ знайти:

1) гострий кут між діагоналями суміжних бічних граней, що не перетинаються;

2) відстань між цими діагоналями;

3) рівняння спільного перпендикуляра до діагоналей.

1.5.12. Скласти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених площинами $x - 3y + 2z - 5 = 0$ (P_1) і $3x - 2y - z + 3 = 0$ (P_2).

1.5.13. Точки $P(4; 6; 8)$ і $Q(0; -2; -4)$ – протилежні вершини ромба, третя вершина лежить на прямій $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Знайти четверту вершину і площу S ромба.

1.5.14. Знайти проекцію прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1}$ (l) на площину $3x - y + 2z - 7 = 0$ (P).

1.5.15. Знайти точку, симетричну точці $A(2; -4; 5)$ відносно прямої $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-4}$ (l).

1.5.16. Знайти рівняння прямої, яка симетрична прямій $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1}$ відносно площини $3x - y + 2z - 7 = 0$.

1.5.17. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Довести, що відстань між площинами, одна з яких проходить через вершини A, B_1, D_1 , а інша – через B, C_1, D , дорівнює $\frac{1}{3}$ діагоналі куба.

1.5.18. Визначити, при яких $\lambda \in \mathbb{R}$ три задані площини перетинаються по одній прямій:

1) $x - y + z = 0, \quad 3x - y - z + 2 = 0, \quad 4x - y + 2z + \lambda = 0;$

2) $x + \lambda y + z = 0, \quad 3x - y + z + 4 = 0, \quad 4x - y - 2z - 30\lambda = 0.$

1.5.19. Знайти центр сфери, вписаної в піраміду, обмежену координатними площинами та площиною $2x + 3y - 6z - 4 = 0$ (P).

1.5.20. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 2 = 0 \quad \text{та} \quad 2x + y - 2z - 7 = 0.$$

1.5.21. На сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ знайти точку, найближчу до площини $x - 2y - 2z + 8 = 0$, та обчислити її відстань до площини.

1.5.22. На прямій $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{1}$ знайти координати точки, найближчої до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, а також відстань від цієї точки до сфери.

1.5.23. Вказати координати точки на сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, найближчої до відрізка $[AB]$, де $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 2)$. Знайти відстань від цієї точки до відрізка $[AB]$.

1.5.24. Визначити, при яких значеннях параметра $a \in \mathbb{R}$ система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0, \\ x + a(y + z) = a \end{cases}$$

має розв'язки. Знайти значення a , при яких система має єдиний розв'язок і вказати цей розв'язок.

1.5.25. Площа перетину кулі радіуса $R=6$ з площиною $x-2y-z-2=0$ дорівнює 30π . Знайти координати центра кулі, якщо він лежить

1) на прямій $x=y=z$; 2) на осі Oy .

1.5.26. Знайти центр і радіус кола
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10z, \\ x + 2y + 2z = 19. \end{cases}$$

1.5.27. Скласти рівняння сфери з центром в точці $C(2; 3; -1)$, яка відтинає від прямої
$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0, \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$
 хорду довжиною 16 одиниць.

1.5.28. Скласти рівняння сфери, яка дотикається до площин $2x + y - 2z - 6 = 0$ і $2z - 2x - y + 4 = 0$ та має центр, що лежить на прямій $-x = \frac{y+1}{-2} = z$.

1.5.29. Скласти рівняння сфери, яка дотикається до прямої $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-6}{4}$ в точці $A(1; -4; 6)$ і до прямої $\frac{x-4}{2} = y+3 = \frac{z-2}{-6}$ в точці $B(4; -3; 2)$.

1.5.30. Знайти найкоротшу відстань від точки $M_0(-1; 0; 1)$ до кола

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 12y - 6z + 24 = 0, \\ 2x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

і координати центра цього кола.

1.5.31. Коло
$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4, \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$
 проектується на деяку площину, що проходить через $O(0; 0; 0)$, у відрізок прямої. Скласти рівняння цієї площини, якщо відомо, що вона розташована на відстані $\frac{1}{2}$ радіуса кола від його центра.

1.5.32. Точки $A(3; -2; 5)$ і $B(-1; 6; -3)$ – кінці діаметра кола, яке проходить через точку $C(1; -4; 1)$. Скласти рівняння цього кола. Скільки розв'язків має задача?

1.5.33. Навколо трикутника $\triangle ABC$ з вершинами $A(3; 1; 1)$, $B(-1; -2; 1)$ і $C(-1; 1; 1)$ описано коло. Скласти його рівняння.

1.5.34. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ освітлена пучком променів, паралельних прямій $z = 0, y = x$. Знайти рівняння кривої, яка утворює межу тіні на площині yOz .

1.5.35. Джерело світла, що знаходиться в точці $M_0(5; 0; 0)$, освітлює сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Знайти рівняння межі тіні на площині yOz .

1.5.36. Знайти геометричне місце точок, віддалених на відстань $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ від прямої $\begin{cases} x - y = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$

1.5.37. Скласти рівняння сфери, яка проходить через коло $\begin{cases} y^2 + z^2 = 11, \\ x = 0 \end{cases}$ і дотикається до площини $x - y - z + 5 = 0$.

1.5.38. Написати рівняння площин, які проходять через пряму $\begin{cases} 4x - y = -4, \\ x + z = 12 \end{cases}$ і дотикаються до сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 67 = 0$.

1.5.39. Довести, що площина $2x - y - z - 8 = 0$ має з поверхнею $4x^2 + 9y^2 = 36z$ тільки одну спільну точку і знайти координати цієї точки.

1.5.40. Знайти геометричне місце центрів куль, що дотикаються до прямих $\begin{cases} y = 0, \\ z = a \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 0, \\ z = -a, \end{cases} (a \neq 0)$.

1.5.41. Пряма (l) ковзає по прямих $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} (l_1)$ та $\begin{cases} y = 1, \\ z = 0 \end{cases} (l_2)$ і залишається паралельною площині $x + y + z = 4$ (P) . Знайти поверхню, утворену рухом прямої (l) .

1.5.42. Знайти прямолінійні твірні заданої поверхні (прямі, що лежать на поверхні), які проходять через точку $M_0(1; 1; 1)$:

$$1) x^2 + y^2 - z^2 = 1; \quad 2) 2xy + yz - xz = 2.$$

1.5.43. Скласти рівняння конуса з вершиною $S(0; 3; 0)$, твірні якого дотикаються до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

1.5.44. Через точку $(1; 1; 4)$ провести площину, яка дотикається до парабол

$$\begin{cases} z = 0, \\ y^2 = 8x \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z^2 = 32x. \end{cases}$$

1.6. РІЗНІ ЗАДАЧІ

1.6.1. Нехай $f(x)$ неперервна на $[0; 1]$, $f(0) = f(1)$. Довести, що існує хорда графіка $y = f(x)$ довжини $\frac{1}{5}$, яка паралельна осі абсцис.

1.6.2. На площині дано деяку пряму (l) . Площину повернули довільним чином. При цьому пряма (l) перейшла в пряму (l_1) . Для кожної точки $M \in l$ утворилася відповідна точка $M_1 \in l_1$. Знайти геометричне місце середин відрізків $[MM_1]$.

1.6.3. Під дією деякої сили точка рухалася по колу $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$. Дія сили припинилася в той момент, коли точка займала положення $A(1; 2)$. Визначити подальшу траєкторію точки.

1.6.4. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка еліпса $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Які значення може приймати добуток її координат $xу$? В яких точках досягається найбільше та найменше значення добутку?

1.6.5. Довести, що рівняння $e^x = ax^2 + bx + c$ може мати не більше трьох різних розв'язків.

1.6.6. Довести, що існує точка $c \in (0; 1)$, в якій функція

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^2 + 1 & (x-1)^2 & 2x+1 \\ 3x-1 & 3x+2 & x+4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x+1 & x^2 & 3x+1 \\ 3x-1 & (x+1)^2 & 4x \\ x^2+1 & x^2-1 & 2x+2 \end{vmatrix}$$

має горизонтальну дотичну.

1.6.7. Визначити, при якому значенні параметра $a \in (0; \infty)$ площа фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{a^2}{(a^2 + 1)(x^2 + 2ax + 2a^2)}$ та віссю Ox , буде найбільшою і чому вона дорівнює.

1.6.8. Площина перетинає прямий круговий циліндр по еліпсу. Що являє собою лінія перетину, якщо циліндр розгорнути на площину?

2. ВКАЗІВКИ

2.1.1. З'ясувати взаємне розташування прямих. Довести, що відстань між паралельними прямими може бути обчислена за формулою

$$d = \frac{|c_1 - c_3|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.1.3. Знайти координати точки перетину висоти трикутника з основою, потім координати вершин основи, використовуючи задану площу S . Можна також знайти довжину вказаної висоти, а далі, враховуючи площу S , знайти довжину основи, а потім координати вершин основи.

2.1.4. Знайти кутовий коефіцієнт основи трикутника, а потім, скориставшись тангенсом кута при основі, кутовий коефіцієнт бічної сторони. Вершину трикутника визначити як точку перетину бічної сторони з висотою трикутника.

2.1.5. З'ясувати, що трикутник прямокутний, і знайти кутовий коефіцієнт основи.

2.1.6. Знайти рівняння бісектриси кута, в якому розташована точка A , а також рівняння бісектриси суміжного кута.

2.1.7. Відстані від заданих точок до протилежних сторін квадрата рівні.

2.1.8. Зобразити через кутовий коефіцієнт шуканої прямої абсциси точок перетину її з заданими прямими.

2.1.9. Знайти кутові коефіцієнти сторін трикутника через координати його вершин. Скористатися умовою перпендикулярності сторін і проведених до них висот, а також формулою для обчислення площі трикутника через координати його вершин.

2.1.10. Знайти напрямний вектор бісектриси.

2.1.11. Розглянути два трикутники, які обмежені відомою і невідомою сторонами заданого трикутника, а також прямою, що проведена з одного кінця відомої сторони заданого трикутника перпендикулярно до бісектриси, проведеної з іншого кінця цієї сторони.

2.1.12. Розглянути два трикутники, в яких одна з вершин співпадає з точкою A , друга вершина – це точка B або C трикутника ABC , а третя вершина симетрична точці A відносно бісектрис кутів B або C відповідно.

2.1.13. Знайти координати інших вершин ромба, використовуючи властивості його діагоналей. Далі обчислити довжину діагоналей ромба і його площу. Простіше знайти гострий кут ромба і довжину його висоти.

2.1.14. 1). Обчислити ліву частину рівняння (MN) в точках A і B та порівняти знаки отриманих чисел.

2). Використати формулу тангенса кута між прямими $\operatorname{tg} \varphi = (k_1 - k_2) / (1 + k_1 k_2)$. Можна також знайти косинус кута між векторами $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$.

2.2.1. Центр описаного кола лежить на перетині перпендикулярів, проведених до середин сторін $\triangle ABC$.

2.2.2. Скористатися формулою тангенса кута між прямими $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, де

k_1, k_2 – кутові коефіцієнти прямих, що з'єднують точку $M(x; y)$ площини з кінцями відрізка $[-1; 1]$ осі Oy .

2.2.3. Центр описаного кола – середина гіпотенузи.

2.2.4. Знайти відстань від точки C до хорди.

2.2.5. Центр кола співпадає з центром симетрії ромба, а його діаметр – з висотою ромба.

2.2.6. Центр кола рівновіддалений від сторін BC та AB і лежить на висоті трикутника ABC , опущеній з вершини A .

2.2.7. Порівняти відстані від центрів кіл до дотичної $y = kx + b$.

2.2.8. Знайти відстані від довільної точки $M(x; y)$ площини до точок A і B .

2.2.9. Переконатися, що радіуси кола, проведені в точки перетину його з прямою $x = 2$, взаємно перпендикулярні. Площа кругового сектора $S_{сек} = \alpha R^2 / 2$, де α – центральний кут (в радіанах).

2.2.10. Переконатися, що трикутник прямокутний і використати вказівки до 2.2.3.

2.2.11. Відстань від центра кола до дотичної до нього дорівнює радіусу.

2.2.12. Переконатися, що відрізок $[AB]$ лежить поза кривою і площа трикутника буде максимальною, якщо C – найбільш віддалена від $[AB]$ точка кривої.

2.2.13. Розмістити початок координат у точці, яка поділяє відстань AB у відношенні 2:1.

2.2.14. При обчисленні вказаної суми використати рівняння кола.

2.2.15. Використати визначення еліпса.

2.2.16. Рівняння двох взаємно перпендикулярних дотичних до еліпса, що проходять через точку $M(x; y)$ площини xOy , записати в параметричному вигляді. Врахувати, що пряма буде дотичною до еліпса, якщо вона має єдину спільну точку з ним.

2.2.17. Рівняння дотичної шукати у вигляді $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Вибір координат точки дотику $(x_0; y_0)$ можна зробити без теорії екстремуму функції, якщо оцінити вираз для площі трикутника з застосуванням нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним двох додатних чисел $\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn}$, $m > 0, n > 0$.

2.2.18. Застосувати формули для координат точки, що поділяє відрізок у заданому відношенні.

2.2.19. Використати рівняння дотичних $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

2.2.20. Весь еліпс міститься у колі радіуса a .

2.2.21. Переконатися, що точки A і B симетричні відносно осі Ox .

2.2.23. Центром ваги трикутника є точка перетину його медіан.

2.2.24. Нехай x_1, x_2 ($x_2 > x_1$) абсциси вершин квадрата, тоді $|x_2 - x_1| = |y(x_1)| = |y(x_2)|$. У випадку (1) розглянути обидва випадки: $x_1 x_2 > 0$ і $x_1 < 0, x_2 > 0$.

2.2.26. Переконатися, що пряма і крива не мають спільних точок. Скласти рівняння дотичної прямої до (L) , яка паралельна (l) в (2), (3).

2.2.27. Виключити одну змінну, наприклад, y із системи рівнянь, які задають криву та пряму, і дослідити отримане квадратне рівняння.

2.2.28 - 2.2.33. Використати умову дотику еліпса і прямої, яка виведена в 2.2.27.

2.2.34. Скористатися умовою перпендикулярності прямих.

2.2.35. Знайти координати центра еліпса і записати рівняння еліпса з урахуванням цих координат.

2.2.36. Рівняння еліпса шукати у вигляді $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, де $O'(x_0; y_0)$ – центр еліпса.

2.2.37. Рівняння рівносторонньої гіперболи шукати у вигляді $(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2 = a^2$, де $O'(x_0; y_0)$ – центр гіперболи.

2.2.38. Шукати рівняння гіперболи у вигляді $y - kx - b = m / (x - a)$.

2.2.39. Розв'язати рівняння відносно y і записати його у вигляді, вказаному в 2.2.38.

2.2.40. Рівняння шуканої лінії може бути записано у вигляді $y^2 = 2px + qx^2$.

2.2.41. Див. вказівку до 3.2.

2.2.42. Рівняння параболи з вершиною в точці $M_0(x_0; y_0)$ і вітками, що спрямовані вниз, шукати у вигляді $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$.

2.2.43. Точки $A(-4; 3)$ і $B(4; 3)$ розташовані симетрично відносно осі Oy .

2.2.44. Звести рівняння кривої до канонічного вигляду і знайти координати точки, через яку проходить коло. При визначенні центра кола скористатися тим, що він лежить на прямій $y = -x$.

2.2.45. Побудувати графік функції. Для визначення кутового коефіцієнта прямих розглянути дискримінант квадратного рівняння, отриманого виключенням y із системи рівнянь прямої і кривої.

2.2.46. Вибрати систему координат так, щоб осі парабол співпадали з осями координат.

2.2.47. Оскільки обидва доданки в лівій частині рівняння – невід'ємні числа, то їх сума може дорівнювати нулю тоді й тільки тоді, коли кожен з доданків дорівнює нулю.

2.2.48. При визначенні координати точки перетину кола з віссю Oy скористатися властивістю січних, проведених до кола з однієї точки.

2.2.49. Записати рівняння як квадратне відносно параметра p і розглянути його дискримінант.

2.2.50. Найкоротша відстань між параболою і прямою дорівнює відстані між заданою прямою і дотичною до параболи, що паралельна цій прямій.

2.2.51. Виразити квадрат відстані довільної точки $M(x; y)$ параболи до точки M_0 через x і знайти його мінімум.

2.2.52. Простежити за рухом прямої $3x + 4y = u$, $u \in R$ та її переміщенням в області, яка визначається заданими нерівностями, паралельно самій собі.

2.2.53. Див. вказівку до 2.12. Але тут точка C повинна бути найближчою до відрізка $[AB]$.

2.2.54. Записати формулу відстані довільної точки параболи $M(x; x^2)$ до прямої.

- 2.2.55.** Виразити квадрат відстані $S = |AM|^2$ через абсцису точки M і знайти його мінімум.
- 2.2.56.** Нехай $C(x_0; y_0)$ – вершина прямого кута. Виразити координати кінців катетів A і B через x_0 , y_0 , a , b і врахувати, що довжина гіпотенузи AB залишається сталою при русі точок A і B по координатним осям.
- 2.2.57.** Нехай K – кутовий коефіцієнт хорди. Виразити координати середини хорди через a і K і виключити K .
- 2.2.58.** Абсциса середини хорди дорівнює півсумі абсцис точок перетину хорди з кривою.
- 2.2.59.** Ввести систему координат, що співпадає з діагоналями квадрата. Дослідити, в яких межах змінюються координати кінців відрізків, розташованих на осях координат в першому квадранті, а також координати середин цих відрізків.
- 2.2.60.** Ввести прямокутну систему координат з центром в середині відрізка AB і віссю абсцис, направленою від точки A до точки B .
- 2.2.61.** Вибрати прямокутну систему координат xOy так, щоб вісь Ox збігалася з прямою l , а центр кола K знаходився на осі Oy .
- 2.2.62.** Звести рівняння кривих до канонічного вигляду. Для першої кривої врахувати область визначення.
- 2.2.63.** Розташувати кола в системі координат xOy . Позначити через α кут між променем і віссю Ox .
- 2.2.64.** Довести, що центр кола збігається з центром ваги трикутника. Скористатись теоремою Вієта для рівняння четвертого степеня.
- 2.2.65.** Виразити через кутовий коефіцієнт k прямої, на якій лежить відрізок, координати середини відрізка, а потім виключити k .
- 2.2.66.** Геометричне місце вершин парабол отримати після вилучення параметра m з координат вершин.
- 2.2.68.** Дотична в точці C має бути паралельна хорді AB . Для визначення ексцентриситету еліпса знайти координати вершин еліпса, переконавшись, що осями симетрії є прямі $y = x$ і $y = -x$.
- 2.2.69 - 2.2.70.** Одна з осей еліпса співпадає з діаметром круга, що лежить в основі циліндра в 2.2.69, а в 2.2.70 – в основі конуса.

2.2.71. Пряма (F_1F_2) – одна з осей симетрії еліпса, друга вісь його симетрії перпендикулярна (F_1F_2) і проходить через середину відрізка $[F_1F_2]$. Вивести рівняння еліпса, користуючись його визначенням. Можна також використати формули перетворення координат.

2.2.72. Віссю параболі є пряма $y = x$, тому її рівняння не змінюється при заміні x на y або y на x . Вивести рівняння параболі, використовуючи її визначення, попередньо знайшовши координати фокуса. З приводу другого способу розв'язання див. вказівку до 2.71. Задачу можна розв'язати і третім способом, враховуючи, що рівняння параболі може мати вигляд $A(x^2 + y^2) + Bxy + C(x + y) = 0$, або $x^2 + y^2 + B_1xy + C_1(x + y) = 0$. При цьому використати координати точки $(1; 0)$ і те, що вершина параболі – єдина точка перетину параболі з її віссю.

2.2.73. Скористатися умовою перпендикулярності дотичних.

2.2.74. Точка $Q \in \Gamma$ і дотичній до Γ , проведений в точці P .

2.2.75. Для обчислення площі трикутника знайти точки перетину дотичної з осями координат.

2.2.76. Шукана відстань – найменша з відстаней від точки A до довільної точки параболі.

2.2.77. За точки дотику прийняти точки з абсцисами x_0 і $-x_0$.

2.2.78. Довести, що функція має єдину точку перетину з віссю Ox . Шуканий кут – це кут нахилу дотичної до кривої в точці її з перетину з віссю Ox .

2.2.79. При визначенні дотичної похідну функції в точці з абсцисою $x_0 = 1$ шукати з урахуванням парності функції і непарності похідної.

2.3.1. Геометричне місце основ перпендикулярів знайти як множину точок перетину перпендикулярів, опущених з вершини параболі на дотичну, з самою дотичною.

2.3.2 - 2.3.3. Використати умови дотику еліпса і прямої (див. 2.2.27), параболі і прямої (див. 2.2.33).

2.3.4, 2.3.6. Див. вказівки до 2.2.27.

2.3.5. Використати умову дотику прямої і гіперболи, виведене в 2.3.4.

2.3.7. Переконатися, що парабола симетрична відносно однієї з осей координат.

2.3.8. Прямі $y = 2 \pm x$ симетричні відносно осі Oy .

2.3.9. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної. Врахувати, що точка дотику належить прямій $y = x$ і параболі.

2.3.10. Для знаходження дотичної використати рівняння прямої, яка проходить через точку A з кутовим коефіцієнтом дотичної, що обчислений в точці дотику $M(x_0; y_0)$.

2.3.11. Прямі $y = -x$ і $y = 5x - 6$ співпадають з дотичними до параболи у точках $(c; y(c))$. Порівняти y для дотичних і прямих. Скористатися умовою рівності многочленів і записати систему для визначення невідомих параметрів a і b .

2.3.12. Порівняти ординати у дотичних до першої та другої параболі, скориставшись умовою рівності многочленів, скласти систему для визначення абсцис точок дотику x_1 та x_2 .

2.3.13. Знайти точки перетину дотичної до другої параболи з першою параболою (кінці хорди).

2.3.14. Рівняння шуканих парабол може бути записано у вигляді $y = a(x + 1)^2 + b$, де $a < 0$.

2.3.15. При визначенні кута нахилу в другому рівнянні вважати x функцією y .

2.4.1. З'ясувати, на які підобласті розбивають координатну площину прямі $x + y = 0$ і $x - 2y + 3 = 0$. Визначити задану нерівністю фігуру.

2.4.2. Розкривши модуль числа a , визначити тип многокутника.

2.4.3. З'ясувати спочатку, при яких $a \in \mathbb{R}$ рівняння $x^2 - 2x + 2y + y^2 - a - 3 = 0$ зображує коло.

2.4.4. Система має єдиний розв'язок у випадку, коли графіки функцій $y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$ і $y = a(x - 1) + 3$ мають одну спільну точку.

2.4.5. Прирівняти до нуля кожний множник лівої частини нерівності і зобразити на площині множину точок, в яких ця нерівність виконується. Система не має розв'язків, якщо пряма, задана другим рівнянням, не має спільних точок з отриманою множиною.

2.4.6. Побудувати графіки функцій, які задані кожним рівнянням системи. Для графіка функції, заданої другим рівнянням, врахувати область значень функції.

2.4.7. Звільнитися від модуля. Знайти екстремум функції на кожному з інтервалів, що складають область визначення функції. Розглянути всі можливі випадки розташування екстремумів графіка функції.

2.4.8. Система рівнянь має чотири розв'язки, якщо лінії, що задані цією системою, мають чотири точки перетину.

2.4.9. Побудувати графіки функцій, заданих першим рівнянням системи. Знайти значення y , при яких існують два розв'язки. Скориставшись другим рівнянням, знайти параметр a для цих випадків.

2.4.10. Знайти k за умови, що система рівнянь має єдиний розв'язок.

2.4.11. Розглянути дискримінант квадратного рівняння, отриманого виключенням y з системи рівнянь прямої і кривої.

2.5.1. Напрямний вектор прямої є нормальним вектором шуканої площини.

2.5.2. Записати рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині (P) і знайти точку її перетину з заданою прямою.

2.5.3. Знайти довжини сторін трикутника ABC і переконатися, що більша його сторона паралельна шуканій площині, а площа ΔABC їй перпендикулярна.

2.5.4. Нехай вершина C має координати $C(a;b;c)$, точка M належить прямій, а N – площині. Записати рівняння прямої в параметричній формі і виразити через параметр координати точки N .

2.5.5. Знайти вектор $\overline{CD}$, що співпадає з висотою ΔABC (див. вказівку до 2.1.24).

2.5.6. Встановити мимобіжність прямих (l_1) і (l_2) , перевіривши, що $\overline{S_1} \times \overline{S_2} \cdot \overline{A_1 A_2} \neq 0$. Для кожної з прямих (l_1) і (l_2) виконати наступні дії:

1) провести площину (P) так, щоб вона проходила через пряму (l_1) і точку A . Вектор $\overline{N} = \overline{S_1} \times \overline{AA_1}$ буде нормальним вектором площини (P) ;

2) знайти точку M перетину площини P і прямої (l_2) ;

3) скласти рівняння прямої AM .

2.5.7. Прямі (l_1) і (l_2) будуть мимобіжними тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ і $\overline{R}$ не компланарні, тобто мішаний добуток $\overline{S_1} \overline{S_2} \overline{R} \neq 0$. Найкоротша відстань d між прямими дорівнює абсолютній величині проекції вектора $\overline{R}$ на вектор $\overline{N_1} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$, тобто

$$d = |np_{\overline{N}} \overline{R}| = \left| \overline{R} \cdot \overline{N^0} \right| = \left| \overline{R} \overline{S_1} \overline{S_2} \right| / \left| \overline{S_1} \times \overline{S_2} \right|.$$

2.5.8 - 2.5.9. Див. вказівку 2.2.86. Переконатися, що в 2.2.88 прямі є мимобіжними. Скласти рівняння прямої, що проходить через довільні точки даних прямих, координати яких виражені через параметри. Для визначення параметрів використати умови перпендикулярності прямих.

2.5.10 - 2.5.11. Див. вказівку до 2.2.86.

2.5.12. Точки бісекторних площин однаково відхилені від заданих площин. Для визначення відхилення звести рівняння площин (P_1) і (P_2) до нормального вигляду і прирівняти отримані відхилення.

2.5.13. Використати властивості діагоналей ромба.

2.5.14. Шукана проекція – це пряма перетину площини (P) з площиною, що проходить через (l) перпендикулярно (P) .

2.5.15. Знайти рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно прямій (l) . Шукана точка розташована симетрично A відносно перетину цієї площини з прямою (l) .

2.5.16. Переконатися, що пряма перетинає площину. Достатньо знайти точку, що симетрична фіксованій точці заданої прямої відносно площини.

2.5.17. Спочатку довести паралельність цих площин і розмістити початок координат в одній з вершин куба.

2.5.18. Дві довільні точки прямої, заданої перетином двох площин, мають належати третій площині.

2.5.19. Центр вписаної у піраміду сфери лежить на перетині бісекторних площин її двограних кутів (див. 5.12). Також можна скористатися тим, що центр сфери рівновіддалений від граней піраміди, в тому числі й від площини (P) .

2.5.20. Знайти відстань від центра сфери до площини.

2.5.21. Знайти точки перетину зі сферою прямої, що перпендикулярна до площини і проходить через центр сфери.

2.5.22. Скласти рівняння площини, яка проходить через центр сфери і перпендикулярна заданій прямій.

2.5.23. Нехай точка C – центр сфери, точка $D \in [AB]$, тоді $|CD|$ – найкоротша відстань від центру сфери до $[AB]$. Якщо кути $\angle CAB$ і $\angle CBA$ – гострі, то $|CD|$ дорівнює довжині висоти трикутника $\triangle ABC$. Коли ж один з кутів тупий, то найкоротшим буде найменший з відрізків $[CD]$ і $[CB]$. Найкоротшу відстань від C до $[AB]$ можна також знайти як мінімум функції $U(t) = |CD|^2$, $t \in [\alpha; \beta]$, де

α і β – значення параметра t з рівняння прямої (AB) , які відповідають точкам A і B .

2.5.24. З'ясувати взаємне розташування площини і сфери в залежності від значень параметра a .

2.5.25. Знайти відстань від центра сфери до площини.

2.5.26. Центр кола – проекція центра сфери на площину.

2.5.27. Знайти відстань від точки C до прямої.

2.5.28. З'ясувати взаємне розташування площин.

2.5.29. Центр сфери знаходиться на перетині трьох площин: перпендикулярних до дотичних прямих і площини, що проходить через середину хорди AB перпендикулярно до неї.

2.5.30. З'ясувати, як розташована точка M_0 відносно кола. Див. також вказівку до задачі 2.5.26.

2.5.31. Знайти центр і радіус кола (див. 2.5.26). Рівняння шуканої площини зручно шукати у вигляді $\alpha x + \beta y + z = 0$.

2.5.32. Шукане коло – лінія перетину площини трикутника ABC зі сферою, центр якої лежить на прямій, що перпендикулярна до цієї площини і проходить через середину відрізка $[AB]$.

2.5.33. З'ясувати тип трикутника $\triangle ABC$, знайшовши довжини його сторін.

2.5.34. Використати умову дотику сфери з прямою, на якій лежить довільний промінь.

2.5.35. Див. вказівку до задачі 5.34.

2.5.36. Застосувати формулу відстані від точки до прямої.

2.5.37. Переконатися, що центр сфери лежить на осі Oz .

2.5.38. Записати рівняння в'язки площин, що проходять через пряму:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

$$\text{де } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad - \text{ загальні рівняння прямої.}$$

2.5.39. Виключити y із заданих рівнянь площини і поверхні. Можна також використати рівняння дотичної площини до поверхні.

2.5.40. Переконатися, що прямі мимобіжні і використати формулу з задачі 2.5.7.

2.5.41. Переконатися, що прямі (l_1) і (l_2) мимобіжні, скласти рівняння (l) , використовуючи умову паралельності (l) і площини (α) .

2.5.42. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку M_0 , і підібрати параметр t так, щоб координати будь-якої її точки задовольняли рівняння поверхні.

2.5.43. Рівняння конуса можна шукати у вигляді $y^2 + z^2 = a(x-3)^2$. Для визначення a розглянути твірну конуса, що лежить в площині $z=0$, як дотичну до кола $x^2 + y^2 = 4$. Конус можна розглядати також як поверхню, що утворена обертанням вказаної твірної навколо осі Ox .

2.5.44. Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді $x-1 + \alpha(y-1) + \beta(z-4) = 0$. Числа α і β знайти з умови дотику цієї площини до парабол.

2.6.1. Скористатися умовою паралельності хорди та осі Ox (теорема Ролля).

2.6.2. Записати радіус-вектор довільної точки прямої у вигляді $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$. Врахувати, що при повороті площини довжина вектора $\vec{a}$ зберігається, тобто параметр t не змінюється.

2.6.3. Точка продовжує рухатися по дотичній до кола.

2.6.4. Задачу можна розв'язати без теорії екстремуму функції, якщо використати нерівність $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$, $a > 0$, $b > 0$, або параметричні рівняння еліпса: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

2.6.5. Доказ провести від протилежного: припустити, що рівняння має чотири корені та застосувати теорему Ролля і властивості коренів многочлена.

2.6.6. Довести, що функція $f(x)$ задовольняє теорему Ролля і застосувати цю теорему.

2.6.7. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; \infty)$.

2.6.8. Система рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = kx \end{cases}$$
 задає еліпс, утворений в результаті

перетину кругового циліндра площиною. Для отримання розгортки обрати систему координат lOz , де l – довжина дуги кола радіуса R , заданого параметричними рівняннями $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, що лежить навпроти центрального кута φ .

3. ВІДПОВІДІ

Пряма на площині

3.1.1. З'ясуємо взаємне розташування прямих. Користуючись загальними рівняннями прямих, записуємо їх нормальні вектори: $\overline{N_1} = (a; b)$, $\overline{N_2} = (b; -a)$, $\overline{N_3} = (a; b)$, $\overline{N_4} = (b; -a)$. Оскільки скалярні добутки векторів дорівнюють нулю ($\overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = ab - ba = 0$, $\overline{N_2} \cdot \overline{N_3} = ba - ab = 0$, $\overline{N_3} \cdot \overline{N_4} = ab - ba = 0$), то всі прямі взаємно перпендикулярні, а чотирикутник є прямокутником. Площа прямокутника дорівнює добутку його ширини на довжину. Ці величини знайдемо як відстань від точки до прямої

$$d = \frac{|Ax + By + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Візьмемо на першій і другій прямій точки $M_1(0; -c_1/b)$ і $M_2(0; c_2/a)$ відповідно. Тоді відстані від них до третьої і четвертої прямих будуть дорівнювати відповідно:

$$d_1 = \frac{\left| a \cdot 0 - b \cdot \frac{c_1}{b} + c_3 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c_1 + c_3|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{і} \quad d_2 = \frac{\left| b \cdot 0 - a \cdot \frac{c_2}{a} + c_4 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c_2 + c_4|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким чином, площа прямокутника:

$$S = d_1 \cdot d_2 = \frac{|-c_1 + c_3|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|-c_2 + c_4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(c_1 - c_3)(c_2 - c_4)|}{a^2 + b^2}, \text{ що й треба було довести.}$$

3.1.2. Запишемо рівняння шуканої прямої у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Оскільки точка

$M(2; 3)$ належить прямій $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, то маємо $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$. Площа трикутника,

який пряма відтинає від координатного кута, дорівнює $S = \pm \frac{1}{2}ab$.

$$\text{Для визначення невідомих } a \text{ і } b \text{ розв'яжемо систему рівнянь} \quad \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1, \\ \pm \frac{1}{2}ab = 12. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1, \\ \frac{1}{2}ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + \frac{72}{b} = 24, \\ a = \frac{24}{b} \end{cases} \Rightarrow b^2 - 12b + 36 = 0, \quad b_{1,2} = 6, \text{ тоді } a_{1,2} = 4.$$

Рівняння прямої $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, або $3x + 2y - 12 = 0$.

$$2) \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1, \\ -\frac{1}{2}ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b - \frac{72}{b} = -24, \\ a = -\frac{24}{b} \end{cases} \Rightarrow b^2 + 12b - 36 = 0, \quad b_1 = -6 + 6\sqrt{2},$$

$$b_2 = -6 - 6\sqrt{2}, \quad a_1 = -4 - 4\sqrt{2}, \quad a_2 = -4 + 4\sqrt{2}.$$

Отримали дві прямі, рівняння яких мають вигляд

$$\frac{x}{-4 - 4\sqrt{2}} + \frac{y}{-6 + 6\sqrt{2}} = 1 \quad \text{та} \quad \frac{x}{-4 + 4\sqrt{2}} + \frac{y}{-6 - 6\sqrt{2}} = 1,$$

тобто $3(1 - \sqrt{2})x + 2(1 + \sqrt{2})y - 12 = 0$ та $3(1 + \sqrt{2})x + 2(1 - \sqrt{2})y - 12 = 0$.

Відповідь: $3x + 2y - 12 = 0$, $3(1 - \sqrt{2})x + 2(1 + \sqrt{2})y - 12 = 0$,

$$3(1 + \sqrt{2})x + 2(1 - \sqrt{2})y - 12 = 0.$$

3.1.3. Розглянемо $\triangle ABC$, де $AB = AC$, $A(0; 0)$,

рівняння (CB) : $2x - y - 10 = 0$, $S_{\triangle ABC} = 20$ і AD –

висота (рис.1). Складемо рівняння (AD) . Оскільки

нормаль прямої (CB) вектор $\vec{N} = (2; -1)$ є

напрямним вектором (AD) , то отримаємо $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1}$

$\Rightarrow x + 2y = 0$. Координати точки D знаходимо з

системи рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(4; -2).$$

Нехай x, y – координати вершини $B(x; y)$, тоді

$$S_{\triangle ABD} = \frac{20}{2} = 10, \quad S_{\triangle ABD} = \frac{AD \cdot BD}{2}, \quad AD = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20},$$

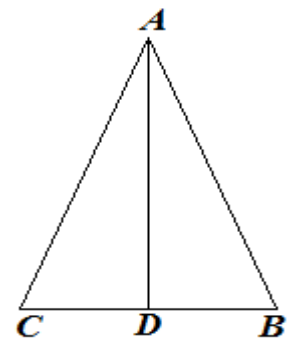


Рис. 1

$$BD = \frac{2S_{\triangle ABD}}{AD}, \quad BD = 20 / \sqrt{20} = \sqrt{20}, \quad BD = d = \frac{|x+2y|}{\sqrt{5}} = \sqrt{20},$$

$$|x+2y|=10, \quad x+2y=\pm 10.$$

Знайдемо координати точок B і C , розв'язавши системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y - 10 = 0, \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow B_1(6; 2); \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y - 10 = 0, \\ x + 2y = -10 \end{cases} \Rightarrow B_2(2; -6).$$

Точку B_1 приймемо за B , а B_2 – за C . Тоді рівняння (AB) : $\frac{x}{6} = \frac{y}{2}$, або $x - 3y = 0$

; (AC) : $\frac{x}{2} = \frac{y}{-6}$, або $3x + y = 0$.

Відповідь: $x - 3y = 0$, $3x + y = 0$.

3.1.4. За двома точками A і B знайдемо рівняння сторони (AB) :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \quad \frac{x + 3}{9} = \frac{y - 4}{-6}, \quad \text{або } 2x + 3y - 6 = 0.$$

Кутовий коефіцієнт цієї прямої $k_1 = -\frac{2}{3}$.

Оскільки положення основи AB трикутника задано в умові однозначно, то ясно, що шукана вершина C буде лежати вище відрізка AB в декартовій системі координат xOy (рис.2).

Рівняння прямої (AC) будемо шукати у вигляді $y - y_A = k_2(x - x_A)$, де k_2 – кутовий коефіцієнт цієї прямої. За умовою тангенс кута між стороною (AC) і основою (AB) дорівнює $\frac{3}{2}$.

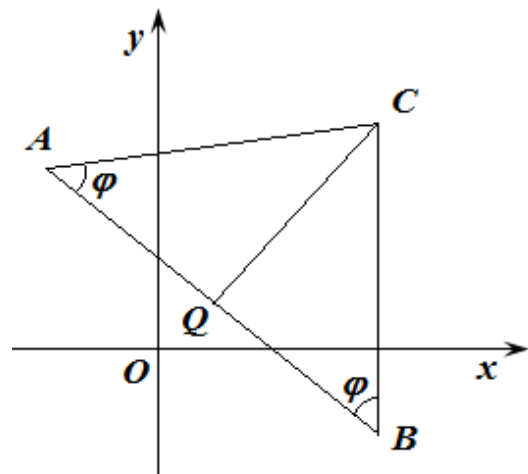


Рис.2

$$\text{Тоді } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{k_2 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3} k_2} = \frac{3}{2}, \quad \text{звідки маємо } k_2 = \frac{5}{12}.$$

Отже, рівняння прямої $y - 4 = \frac{5}{12}(x + 3)$, або $y = \frac{5}{12}x + \frac{21}{4}$ (AC).

Знайдемо рівняння висоти (CQ) трикутника, опущеної з точки C на основу (AB). Оскільки трикутник $\triangle ABC$ рівнобедрений, то точка $Q(x_Q; y_Q)$ – середина відрізка AB. Тоді $x_Q = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}$, $y_Q = \frac{y_A + y_B}{2} = 1$. Отже, маємо точку $Q\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

З іншого боку, висота $CQ \perp AB$, тож її кутовий коефіцієнт $k_3 = \frac{1}{k_1}$. Висота CQ проходить через точку $Q\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ з кутовим коефіцієнтом $k_3 = \frac{3}{2}$. Отже, рівняння висоти має вигляд $y - 1 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$, або $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$ (CQ). Перетин прямих (AC) і (CQ) дає шукані координати точки C:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{12}x + \frac{21}{4}, \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow C\left(6; \frac{31}{4}\right).$$

Відповідь: $C\left(6; \frac{31}{4}\right)$.

3.1.5. В трикутнику $\triangle ABC$ сторона (AB) задана рівнянням $x - 3y = 0$, а сторона (BC) – рівнянням $3x + y = 0$ (рис.3). Площа трикутника $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$, де BH – висота.

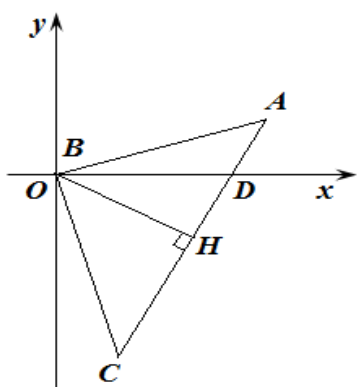


Рис.3

Знайдемо координати вершини B:

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0, B(0; 0).$$

Кутові коефіцієнти бічних сторін дорівнюють: $k_{AB} = \frac{1}{3}$, $k_{BC} = -3$. Оскільки $k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$,

то трикутник $\triangle ABC$ – прямокутний, рівнобедрений з прямим кутом $\angle B = 90^\circ$.

	Рівняння сторони (AC), що проходить через точку $D(5;0)$, шукаємо у вигляді $y = k_{AC}(x - 5)$. Знаючи, що кути при основі трикутника дорівнюють 45° , маємо:
--	---

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{|k_{AC} - k_{AB}|}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}}; \quad 1 = \frac{\left| k_{AC} - \frac{1}{3} \right|}{1 + k_{AC} \cdot \frac{1}{3}}.$$

Розглянемо два випадки: 1) $1 = \frac{k_{AC} - \frac{1}{3}}{1 + k_{AC} \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow k_{AC} = 2;$

2) $1 = \frac{\frac{1}{3} - k_{AC}}{1 + k_{AC} \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow k_{AC} = -\frac{1}{2} < 0$ – не підходить за умовою задачі. Отже,

рівняння сторони (AC): $y = 2(x - 5)$, або $2x - y - 10 = 0$.

Довжину висоти BH знайдемо як відстань від точки B до прямої (AC):

$$BH = \frac{|2x_B - y_B - 10|}{\sqrt{4+1}} = \frac{10}{\sqrt{5}}.$$

У трикутнику $\triangle ABC$ маємо: $CH = BH = \frac{10}{\sqrt{5}}$. Тоді довжина основи трикутника $AC = 2CH = \frac{20}{\sqrt{5}}$, а його площа $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} = 20$.

Відповідь: 20.

3.1.6. Розглянемо кут між діагоналями ромба, в якому розташована точка A (рис. 4). Бісектриса цього кута має рівняння $\frac{7x - y + 4}{\sqrt{50}} = \frac{x + y - 2}{\sqrt{2}}$, або $x - 3y + 7 = 0$. Тоді рівняння бісектриси суміжного кута має вигляд: $\frac{7x - y + 4}{\sqrt{50}} = -\frac{x + y - 2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 6x + 2y - 3 = 0$, або $3x + y - \frac{3}{2} = 0$.

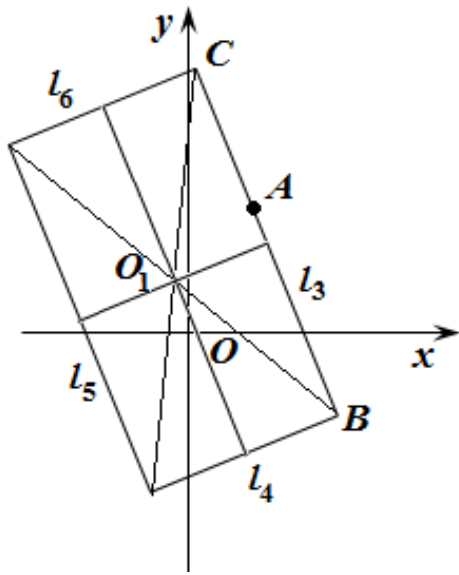


Рис.4

Знайдемо рівняння сторони (l_3) прямокутника, яка паралельна даній бісектрисі, у вигляді $3x + y + C_1 = 0$. За умови $A(3; 5) \in (l_3)$, отже, приходимо до шуканого рівняння $3x + y - 14 = 0$.

Рівняння паралельної до (l_3) сторони (l_5) прямокутника шукаємо у вигляді $3x + y + C_2 = 0$.

Для визначення C_2 знайдемо координати точки O_1 як точки перетину діагоналей прямокутника:

$$\begin{cases} 7x - y + 4 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow O_1\left(-\frac{1}{4}; \frac{9}{4}\right).$$

Оскільки точка O_1 знаходиться на однаковій відстані від прямих (l_3) і (l_5) , то вірна рівність:

$$\frac{\left|3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4} - 14\right|}{\sqrt{9+1}} = \frac{\left|3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4} + C_2\right|}{\sqrt{9+1}}, \text{ або } \frac{25}{2\sqrt{10}} = \frac{\left|\frac{6}{4} + C_2\right|}{\sqrt{10}} \Rightarrow C_2 = 11.$$

Маємо рівняння сторони (l_5) : $3x + y + 11 = 0$.

Рівняння сторони (l_4) : $x - 3y + C_3 = 0$. Знайдемо вершину B прямокутника, яка є перетином прямих (l_2) і (l_3) :

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ 3x + y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(6; -4).$$

Точка B належить прямій (l_4) , тож одержимо $C_3 = -18$. Тоді маємо рівняння прямої (l_4) $x - 3y - 18 = 0$.

Рівняння (l_6) шукаємо у вигляді $x - 3y + C_4 = 0$. Координати вершини C знаходимо як координати точки перетину прямих (l_1) і (l_3) :

$$\begin{cases} 7x - y + 4 = 0, \\ 3x + y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1; 11).$$

Оскільки точка C належить прямій (l_6) і $C_4 = 32$, то рівняння цієї сторони остаточно набуває вигляду: $x - 3y + 32 = 0$.

Відповідь: $3x + y - 14 = 0$, $x - 3y - 18 = 0$, $3x + y + 11 = 0$, $x - 3y + 32 = 0$.

3.1.7. Нехай $OABC$ – квадрат, $D(3;1) \in (CB)$, $E(8;6) \in (AB)$ (рис. 5). Запишемо рівняння (OA) у вигляді: $y = kx$, тоді (OC) : $y = -x/k$ ($k \neq 0$). Якщо б $k = 0$, то сторони мали б рівняння: $x = 0$, $y = 0$; $x = 3$, $y = 6$ і отриманий прямокутник не був би квадратом. Відстані d_1 і d_2 від точок D і E до протилежних сторін рівні $d_1 = d_2$:

$$d_1 = \frac{|3k - 1|}{\sqrt{1 + k^2}}; \quad d_2 = \frac{|6k + 8|}{\sqrt{1 + k^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3k - 1| = |6k + 8| \Rightarrow 3k - 1 = \pm(6k + 8), \quad k_1 = -3, \quad k_2 = -7/9.$$

Кутовий коефіцієнт прямої (OA) не може дорівнювати $k = -3$, бо це суперечить умові задачі, тому що в цьому випадку пряма (OC) $y = x/3$ проходила б через точку D . Таким чином $k = -7/9$ і рівняння прямої (OA)

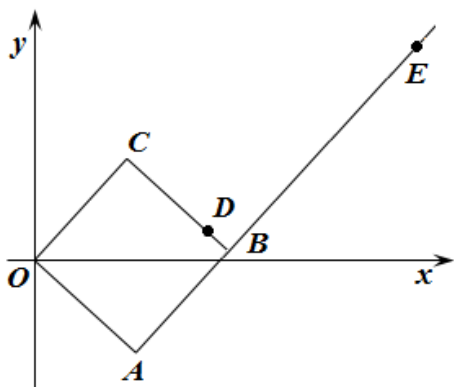


Рис.5

набуває вигляду $y = -7x/9$, а прямої (OC) : $y = 9x/7$. При $k = -7/9$ довжина сторони квадрата

$$d_1 = \frac{|3 \cdot (-7/9) - 1|}{\sqrt{1 + (7/9)^2}} = \frac{30}{\sqrt{130}},$$

а його площа $S = d_1^2 = \frac{90}{13}$.

Згідно умові паралельності до сторін (OC) і (OA) , кутові коефіцієнти прямих (AB) і (BC) дорівнюють відповідно $k_1 = 9/7$ і $k_2 = -7/9$.

Тоді рівняння цих сторін запишуться у вигляді: $y - 6 = 9(x - 8)/7$ і $y - 1 = -7(x - 3)/9$, або $9x - 7y - 30 = 0$ (AB) і $7x + 9y - 30 = 0$ (BC) .

Відповідь: $y = -7x/9$, $y = 9x/7$, $9x - 7y - 30 = 0$, $7x + 9y - 30 = 0$, $90/13$.

3.1.8. Позначимо через $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ точки перетину прямої (M_1M_2) з прямими $x + 2y - 13 = 0$ і $2x + y - 11 = 0$. Враховуючи те, що точка $A(2; 4)$ поділяє відрізок $[M_1M_2]$ навпіл, невідомі координати знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = 2, \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = 4, \\ x_1 + 2y_1 - 13 = 0, \\ 2x_2 + y_2 - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(5; 1), M_2(-1; 7).$$

Тоді рівняння прямої (M_1M_2) : $\frac{x-5}{-6} = \frac{y-1}{6}$, або $x + y - 6 = 0$.

Відповідь: $x + y - 6 = 0$.

3.1.9. Нехай у трикутнику $\triangle ABC$ вершина $A(x_1; y_1)$ лежить на прямій $y = 0$, вершина $B(x_2; y_2)$ – на прямій $y = -x$, а вершина $C(x_3; y_3)$ – на прямій $y = 2x$. Тоді координати вершин можна записати у вигляді $A(x_1; 0)$, $B(x_2; -x_2)$, $C(x_3; 2x_3)$.

Кутовий коефіцієнт сторони (AB) : $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, або $k_{AB} = -\frac{x_2}{x_2 - x_1}$.

За умовою задачі висота CE лежить на прямій $y = 2x$, кутовий коефіцієнт якої $k_{CE} = 2$. Оскільки $CE \perp AB$, то $k_{CE} \cdot k_{AB} = -1 \Rightarrow -\frac{2x_2}{x_2 - x_1} = -1$, $x_2 = -x_1$.

Кутовий коефіцієнт сторони (AC) : $k_{AC} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, $k_{AC} = \frac{2x_3}{x_3 - x_1}$. Висота BF лежить на прямій $y = -x$, $k_{BF} = -1$, $BF \perp AC$, $k_{BF} \cdot k_{AC} = -1 \Rightarrow -\frac{2x_3}{x_3 - x_1} = -1$, $x_3 = -x_1$.

Кутовий коефіцієнт сторони (BC) : $k_{BC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, $k_{BC} = \frac{2x_3 + x_2}{x_3 - x_2}$. Висота AD лежить на прямій $y = 0$, $k_{AD} = 0$, $AD \perp BC$, $k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} \Rightarrow -\frac{x_3 - x_2}{2x_3 + x_2} = 0$, $x_2 = x_3 = -x_1$.

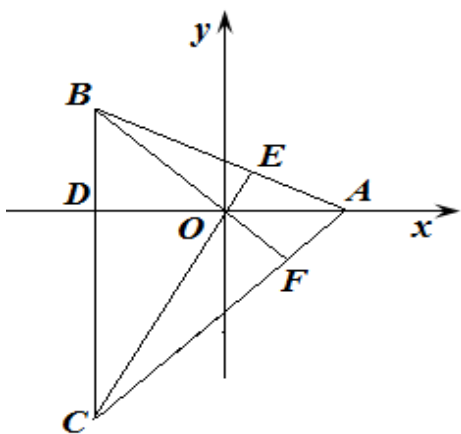


Рис.6

Площу трикутника $\triangle ABC$ обчислюємо за формулою:

$$S_{\triangle ABC} = \left| \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ -x_1 & x_1 & 1 \\ -x_1 & -2x_1 & 1 \end{vmatrix} \right| \Rightarrow$$

$$3x_1^2 = 12, \quad (x_1)_{1,2} = \pm 2.$$

Тоді координати вершин трикутника:

$$A(2; 0), \quad B(-2; 2), \quad C(-2; -4) \quad (\text{рис.6}),$$

$$\text{або } A(-2; 0), \quad B(2; -2), \quad C(2; 4).$$

Відповідь: $A(\pm 2; 0), \quad B(\mp 2; \pm 2), \quad C(\mp 2; \mp 4)$.

3.1.10. Розглянемо вектори $\overline{AB} = \overline{a} = 5\overline{i} + 10\overline{j}$ і $\overline{AC} = \overline{b} = 8\overline{i} + 4\overline{j}$, нехай AD – бісектриса кута (рис.7).

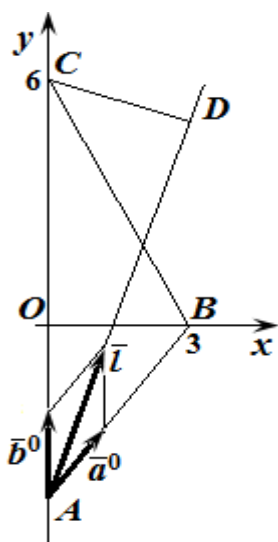


Рис.7

Напрямний вектор $\overline{S}$ бісектриси (AD) можна записати у вигляді:

$$\overline{S} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = \frac{5\overline{i} + 10\overline{j}}{5\sqrt{5}} + \frac{8\overline{i} + 4\overline{j}}{4\sqrt{5}} = \frac{3\overline{i} + 3\overline{j}}{\sqrt{5}},$$

або $\overline{S} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right)$. Рівняння бісектриси (AD):

$$\frac{\sqrt{5}(x+4)}{3} = \frac{\sqrt{5}(y+5)}{3} \Rightarrow x - y - 1 = 0.$$

Відстань від точки C до прямої (AD):

$$|CD| = d = \frac{|4 + 1 - 1|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}.$$

Відповідь: $2\sqrt{2}$.

3.1.11. Нехай в трикутнику $\triangle ABC$ рівняння сторони (AC) $x + 7y - 6 = 0$, а бісектриси, що виходять з вершини A і C , мають рівняння $x + y - 2 = 0$ і $x - 3y - 6 = 0$ відповідно.

Координати вершин A і C знайдемо як координати точок перетину сторони (AC) з бісектрисами:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x + 7y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right); \quad \begin{cases} x - 3y - 6 = 0, \\ x + 7y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6; 0).$$

Координати вершини B визначимо як координати точки перетину сторін (AB) і (CB) (рис. 8).

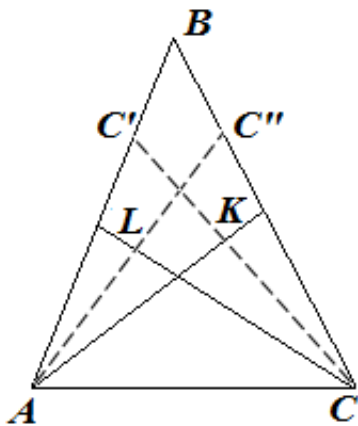


Рис. 8

Для того, щоб записати рівняння (AB) , знайдемо координати точки K перетину висоти, опущеної з вершини C , та бісектриси кута A .

Кутовий коефіцієнт $k_{AK} = -1$, $k_{CK} = 1$, рівняння $(CK): y = x - 6$.

Координати точки K отримаємо з системи рівнянь: $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ y = x - 6 \end{cases} \Rightarrow K(4; -2)$.

В трикутнику $\Delta ACC'$ бісектриса AK є висотою і медіаною. Тоді $x_K = \frac{x_C + x_{C'}}{2}$,

$$y_K = \frac{y_C + y_{C'}}{2}.$$

Підставивши сюди координати точок C і K , знайдемо $C'(2; -4)$. Рівняння прямої (AC') , на якій лежить сторона трикутника AB , запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - \frac{4}{3}}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{y - \frac{2}{3}}{-4 - \frac{2}{3}} \Rightarrow 7x + y - 10 = 0.$$

Аналогічно знайдемо рівняння сторони $(CB): k_{CL} = \frac{1}{3}$, $k_{AL} = -3$,

рівняння висоти $(AL): y - \frac{2}{3} = -3\left(x - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow 9x + 3y - 14 = 0$.

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x - 3y - 6 = 0, \\ 9x + 3y - 14 = 0, \end{cases}$ визначимо координати

точки $L\left(2; -\frac{4}{3}\right)$. Точка L – середина відрізка AC'' . Тому $x_L = \frac{x_A + x_{C''}}{2}$,

$$y_L = \frac{y_A + y_{C''}}{2} \Rightarrow C''\left(\frac{8}{3}; -\frac{10}{3}\right).$$

Рівняння прямої (CC''), а також сторони (CB), що збігається з нею,

запишемо у вигляді $\frac{x - \frac{8}{3}}{6 - \frac{8}{3}} = \frac{y + \frac{10}{3}}{0 + \frac{10}{3}} \Rightarrow x - y - 6 = 0$.

Тоді координати вершини B трикутника $\triangle ABC$ можна визначити з системи рівнянь $\begin{cases} 7x + y - 10 = 0, \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; -4)$.

Відповідь: $(2; -4)$.

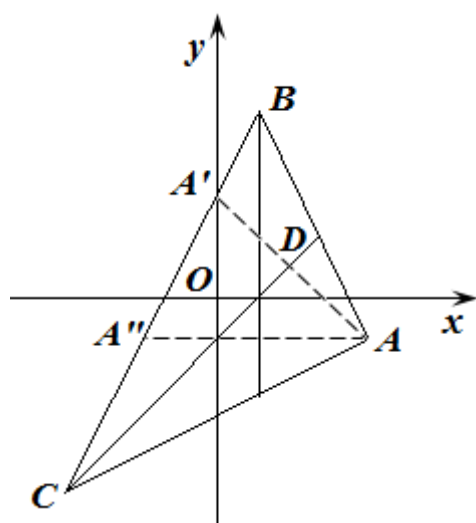


Рис.9

3.1.12. Нехай в трикутнику $\triangle ABC$ $x - 1 = 0$ і $x - y - 1 = 0$ – рівняння бісектрис кутів B і C відповідно (рис.9).

Позначимо через $D(x; y)$ точку перетину бісектриси кута C з перпендикуляром, проведеним з вершини A до цієї бісектриси. Кутовий коефіцієнт $k_{CD} = 1$, тоді $k_{AD} = -1$. Рівняння прямої (AD): $y + 1 = -(x - 4)$, або $y = -x + 3$. Координати точки D знайдемо з системи рівнянь: $\begin{cases} y = -x + 3, \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow D(2; 1)$.

Точка A' симетрична точці A відносно бісектриси $x - y - 1 = 0$ і розташована на стороні (BC).

Точка D – середина відрізка AA' . Тому $x_D = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$, $y_D = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$. Звідси маємо $x_{A'} = 2x_D - x_A$, $y_{A'} = 2y_D - y_A$. Підставивши координати точок A і D , знайдемо $x_{A'} = 0$, $y_{A'} = 3$. Маємо точку $A'(0; 3)$.

Точка A'' симетрична точці A відносно бісектриси $x = 1$ і розташована на стороні (BC): $A''(-2; -1)$. Тоді рівняння прямої (BC), яка проходить через точки A' і A'' , запишемо так: $\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 3}{-1 - 3}$, або $2x - y + 3 = 0$.

Розв'язуючи спільно отримане рівняння та рівняння бісектриси кута C $x - y - 1 = 0$, визначимо координати точки їх перетину: $x_C = -4$, $y_C = -5$, тобто

$C(-4; -5)$. Рівняння сторони (AC) матиме вигляд: $\frac{x-4}{-4-4} = \frac{y+1}{-5+1}$, або $x-2y-6=0$.

Знайдемо координати точки B як точки перетину прямої (BC) $2x-y+3=0$ і бісектриси кута B $x-1=0$. Отримаємо $B(1; 5)$. Рівняння сторони (AB) : $\frac{x-4}{1-4} = \frac{y+1}{5+1}$, або $2x+y-7=0$.

Відповідь: $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$, $2x-y+3=0$.

3.1.13. Перший спосіб. Нехай $ABCD$ – ромб. Рівняння двох його сторін $2x+y-5=0$ і $x+2y-7=0$ свідчать, що це сторони, які перетинаються і вершина $(3; 5)$ не лежить на них. Нехай перше рівняння – це (AB) , а друге – (AD) і $C(3; 5)$. Координати вершини A знайдемо як перетин прямих (AB) і (AD) : $\begin{cases} 2x+y-5=0, \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 3)$. Координати середини діагоналей точки O знаходимо

за формулами $x_O = \frac{x_A + x_C}{2}$, $y_O = \frac{y_A + y_C}{2}$, отже $O(2; 4)$.

Рівняння діагоналі (AC) : $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{5-3}$, або $x-y+2=0$. Кутовий коефіцієнт (AC) дорівнює $k_{AC}=1$, тоді кутовий коефіцієнт діагоналі (BD) $k_{BD}=-1$. Рівняння (BD) запишеться: $y-4=-(x-2)$, або $x+y-6=0$. Вершина B є перетином сторони (AB) і діагоналі (BD) . Її координати знайдемо з системи рівнянь $\begin{cases} 2x+y-5=0, \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 7)$. Сторона (CD) паралельна

стороні (AB) , тому $k_{CD}=k_{AB}=-2$. Рівняння (CD) має вигляд $y-5=-2(x-3)$, або $2x+y-11=0$. Координати вершини D визначимо з системи рівнянь:

$\begin{cases} x+2y-7=0, \\ 2x+y-11=0 \end{cases} \Rightarrow D(5; 1)$. Тоді площа ромба

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 6^2} = 12 \text{ (кв.од.)}$$

Другий спосіб. Знайдемо кут між заданими сторонами ромба (AB) $2x+y-5=0$ і (AD) $x+2y-7=0$, як кут між їхніми нормальними векторами

$\varphi = (\overline{N_1}, \overline{N_2})$, де $\overline{N_1} = (2; 1)$, $\overline{N_2} = (1; 2)$. Маємо $\cos \varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| |\overline{N_2}|} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\sin \varphi = 3/5$. Далі, $S = a^2 \sin \varphi = ah$, де a – сторона, а h – висота ромба. Оскільки $h = d$ – відстань від точки C до (AB) , то $h = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Тому

$$a = \frac{h}{\sin \varphi} = \frac{6}{\sqrt{5}} : \frac{3}{5} = 2\sqrt{5} \quad \text{і} \quad S = 2\sqrt{5} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 12 \text{ (кв.од)}.$$

Відповідь: 12 кв.од.

3.1.14. 1). Пряма (MN) поділяє площину на 2 півплощини. Координати точок однієї півплощини при підстановці в $Ax + By + C$ дають один знак, а другої півплощини – протилежний. Оскільки $(2 \cdot 4 + 3 - 1) \cdot (2 \cdot (-2) + (-1) - 1) = -60 < 0$, то точки A і B лежать по різні сторони від прямої (MN) .

2). Нехай x, y – координати точки $C(x; y)$, що належить прямій (MN) .

Тоді кутові коефіцієнти прямих (AC) і (BC) дорівнюють $k_{AC} = \frac{y-3}{x-4}$ і

$k_{BC} = \frac{y+1}{x+2}$, а кутовий коефіцієнт прямої (MN) $k_{MN} = -2$. Застосувавши

формулу тангенса кута між прямими, знайдемо координати точки C з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ \frac{-\frac{y-3}{x-4} - 2}{1 - 2 \cdot \frac{y-3}{x-4}} = \frac{2 + \frac{y+1}{x+2}}{1 - 2 \cdot \frac{y+1}{x+2}}, \end{cases}$$

розв'язком якої є $x = 1; y = -1$. Тобто, координати точки $C(1; -1)$.

Відповідь: $(1; -1)$.

3.2. Криві другого порядку

3.2.1. Центр описаного кола лежить на перетині перпендикулярів до середин сторін трикутника. AD – висота рівнобедреного трикутника $\triangle ABC$. Нормальний вектор (CB) $\vec{N} = (1; -2)$ є напрямним вектором прямої (AD) . Тоді рівняння

$$(AD): \frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{-2}, \text{ або } 2x + y - 14 = 0.$$

Рівняння (AM) запишемо у вигляді: $\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-3}{7-3}$, або $x - y + 2 = 0$.

Знайдемо координати вершини C , яка є перетином (AM) і (CB) :

$$\begin{cases} x - 2y + 12 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 8, y = 10, \text{ тобто } C(8; 10).$$

Оскільки пряма (OK) – перпендикуляр, проведений до середини (AC) , то $x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = 6$, $y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = 8$, а її напрямний вектор $\vec{S} = (1; -1)$. Рівняння (OK) має вигляд: $\frac{x-6}{1} = \frac{y-8}{-1} \Rightarrow x + y - 14 = 0$.

Центр кола O знайдемо з системи рівнянь: $\begin{cases} 2x + y - 14 = 0, \\ x + y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0; 14)$.

Радіус кола $R = OA = \sqrt{(4-0)^2 + (6-14)^2} = \sqrt{80}$, а рівняння кола, описаного навколо $\triangle ABC$: $(x-0)^2 + (y-14)^2 = 80$.

Відповідь: $x^2 + (y-14)^2 = 80$.

3.2.2. Нехай $A(0; -1)$, $B(0; 1)$, $M(x; y)$ – точка, що задовольняє умову задачі (рис.10).

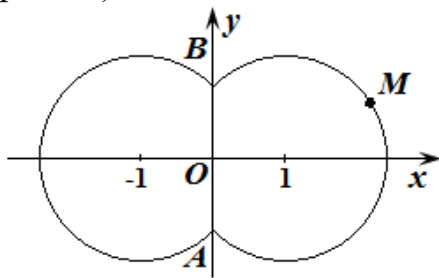


Рис.10

Прямі $\frac{X-0}{x-0} = \frac{Y+1}{y+1}$ (AM) і $\frac{X-0}{x-0} = \frac{Y-1}{y-1}$ (BM) обмежують кут зору. Їхні кутові коефіцієнти дорівнюють $k_{AM} = \frac{y+1}{x}$ і $k_{BM} = \frac{y-1}{x}$ відповідно. Оскільки кут між прямими (AM) і (BM) дорівнює 45° , скористуємось

формулою
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{|k_{BM} - k_{AM}|}{1 + k_{AM} \cdot k_{BM}} = \frac{\left| \frac{y-1}{x} - \frac{y+1}{x} \right|}{1 + \frac{y+1}{x} \cdot \frac{y-1}{x}} = \pm 1.$$

Приходимо до рівнянь двох кіл: $-2x = \pm(x^2 + y^2 - 1)$.

1) $x^2 + y^2 - 1 = -2x \Rightarrow (x^2 + 2x + 1) - 1 + y^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$ – коло з центром в точці $C_1(-1; 0)$ і радіусом $R = \sqrt{2}$.

2) $x^2 + y^2 - 1 = 2x \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2$ – коло

з центром в точці $C_1(1; 0)$ і радіусом $R = \sqrt{2}$. На рис.10 видно, що кожне з кіл входить не повністю.

Відповідь: $x \leq 0$: $(x+1)^2 + y^2 = 2$;
 $x > 0$: $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

3.2.3. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника $\triangle ABC$, це – середина гіпотенузи AB (рис.11). Оскільки гіпотенуза лежить на осі Oy , а катет BC на прямій $x - 2y + 2 = 0$, то точка $B(0; 1)$ – одна з вершин прямокутника.

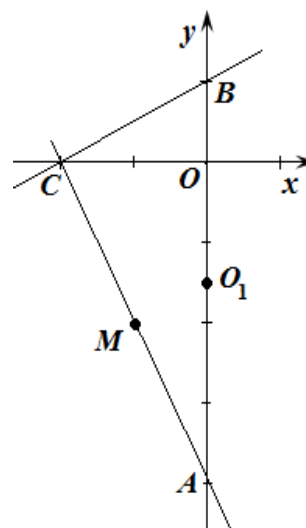


Рис.11

Кут $\angle C = \pi / 2$, тобто $(AC) \perp (BC)$, отже, $k_{BC} = \frac{1}{2}$, $k_{AC} = -2$. Знаючи нахил прямої (AC) і точку $M(-1; -2)$ на ній, одержимо рівняння (AC) : $y + 2 = -2(x + 1)$, або $2x + y + 4 = 0$.

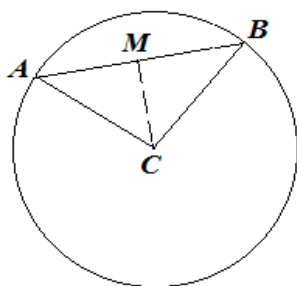
Перетином (AC) з віссю Oy є точка $A(0; -4)$. Центр кола O_1 – середина відрізка AB . Тому

$$x_{O_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = 0, \quad y_{O_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Радіус кола $R = O_1B = \frac{5}{2}$. Отримуємо рівняння кола, описаного навколо прямокутного трикутника $\triangle ABC$: $x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Відповідь: $x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

3.2.4. За умовою хорда AB лежить на прямій $2x - 5y + 18 = 0$, а її довжина дорівнює 6 (рис.12).



Трикутник $\triangle ABC$ – рівнобедрений, CM – медіана і висота: $AM = MB = \frac{AB}{2} = 3$.

Довжину MC знайдемо як відстань точки C від прямої AB :

Рис. 12

$$MC = d = \frac{|2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) + 18|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}.$$

В прямокутному трикутнику $\triangle AMC$ гіпотенуза

$$AC = R = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{9 + 29} = \sqrt{38}.$$

Отримуємо рівняння кола: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$.

Відповідь: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$.

3.2.5. Знайдемо точки перетину діагоналі ромба $x - y + 2 = 0$ з двома його протилежними сторонами $x + 2y - 7 = 0$ і $x + 2y - 13 = 0$. Для цього розв'яжемо системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 2y - 7 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 3; M_1(1; 3).$$

$$2) \begin{cases} x + 2y - 13 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3, y_2 = 5; M_2(3; 5).$$

Центр O вписаного в ромб кола співпадає з центром симетрії ромба і є точкою перетину діагоналей. Оскільки діагоналі в точці перетину поділяються навпіл, то маємо:

$$x_O = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2; \quad y_O = \frac{y_1 + y_2}{2} = 4.$$

Радіус кола дорівнює відстані від центру симетрії ромба до однієї з його сторін:

$$R = d = \frac{|2 + 2 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Тоді рівняння кола матиме вигляд $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{5}$.

Відповідь: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{5}$.

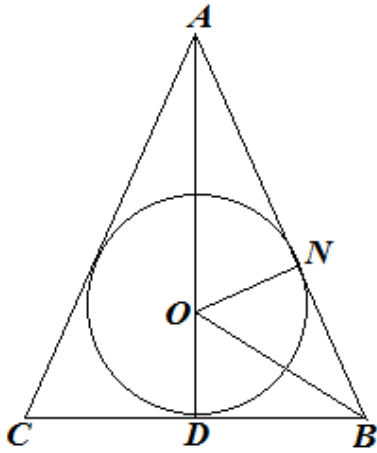


Рис.13

3.2.6. Нехай $\triangle ABC$ – рівнобедрений ($AB = AC$),
(BC): $2x - y = 0$ і $A(2; 2)$; $N(0; 6) \in (AB)$
(рис.13).

Центр O вписаного кола лежить на перетині бісектрис кутів $\triangle ABC$. Але AD є висотою, медіаною і бісектрисою, тому точка O лежить на перетині (AD) і (OB) , причому $O \in (AD)$. Складемо рівняння (AD) і (AB) .
Маємо: (AB) співпадає з (AM) , тому рівняння (AB) :

$$\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-2}{6-2} \Rightarrow 2x + y - 6 = 0.$$

$(AD) \perp (BC) \Rightarrow (AD): \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$ (за напрямний вектор (AD) можна взяти вектор нормалі (CB) $\vec{N}_{CB} = (2; -1)$).

Нехай N і D – точки дотику сторін AB і CB до кола, тоді:

$$\begin{cases} |OD| = |ON|, \\ O(x_0; y_0) \in (AD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x_0 - y_0| / \sqrt{5} = |2x_0 + y_0 - 6| / \sqrt{5}, \\ x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1) \begin{cases} 2x_0 - y_0 = 2x_0 + y_0 - 6, \\ x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_0 - y_0 = -2x_0 - y_0 + 6, \\ x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3/2, \\ y_0 = 9/4. \end{cases}$$

Отже, $O_1(0; 3)$, $O_2(3/2; 9/4)$.

Точки A і O повинні лежати по один бік від (CB) , тому перевіримо знак лівої частини рівняння (CB) у випадках, коли $O = O_1$ і $O = O_2$. В точці $A(2; 2)$ маємо: $2x - y = 0$, $2 \cdot 2 - 1 > 0$; в точці O_1 : $-3 < 0$; в точці O_2 : $2 \cdot 3/2 - 9/4 > 0$. Тому точка $O_2(3/2; 9/4)$ – центр вписаного кола, його радіус

$$R = \frac{|2 \cdot (3/2) - 9/4|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{4\sqrt{5}}.$$

Отже, $(x - 3/2)^2 + (y - 9/4)^2 = 9/80$ – рівняння шуканого кола.

Відповідь: $(x - 3/2)^2 + (y - 9/4)^2 = 9/80$.

3.2.7. Нехай рівняння дотичної $y = kx + b$. З умови випливає, що точка $O_1(1; 1)$ розташована на відстані 2, а точка $O_2(2; 3)$ – на відстані 4 від дотичної (рис.14).

Тоді маємо дві рівності:

$$\frac{|1 - k - b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2, \quad \frac{|3 - 2k - b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 4.$$

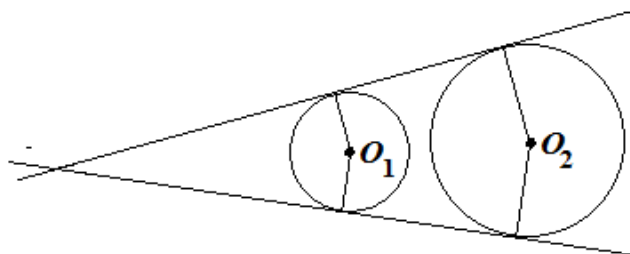


Рис. 14

Звідси, як наслідок, отримаємо

$$|3 - 2k - b| = 2|1 - k - b|.$$

Якщо взяти $3 - 2k - b = 2(1 - k - b)$, $b = -1$, то $\frac{|2 - k|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2 \Rightarrow$

$$4(1 + k^2) = (2 - k)^2 \Rightarrow 3k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{4}{3}.$$

Можливі два випадки. В першому маємо дві дотичні: $y + 1 = 0$ і $4x + 3y + 3 = 0$.

В другому $3 - 2k - b = 2(b + k - 1) \Rightarrow b = \frac{5 - 4k}{3}$, тобто $\frac{|1 - k + \frac{4k - 5}{3}|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2 \Rightarrow$

$$6\sqrt{1 + k^2} = |k - 2| \Rightarrow 35k^2 + 4k + 32 = 0, \quad D = -4464 < 0.$$

Дійсних коренів у останнього квадратного рівняння немає, тому другий випадок треба відкинути.

Відповідь: $y + 1 = 0$, $4x + 3y + 3 = 0$.

3.2.8. Нехай точка $M(x; y)$ – деяка точка шуканої лінії. Оскільки ця точка розташована від точки $A(x_1; y_1)$ на відстані, вдвічі більшій, ніж від точки $B(x_2; y_2)$, то $|MA| = 2|MB|$.

Маємо $|MA| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, $|MB| = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$, тоді рівняння шуканої лінії матиме вигляд

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = 2\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Перетворимо це рівняння. Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = 4x^2 - 8xx_2 + 4x_2^2 + 4y^2 - 8yy_2 + 4y_2^2, \text{ або}$$

$$3x^2 + x(2x_1 - 8x_2) + 3y^2 + y(2y_1 - 8y_2) + 4x_2^2 + 4y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0$$

Виділивши повні квадрати в останньому рівнянні, дістанемо:

$$3\left(x + \frac{x_1 - 4x_2}{3}\right)^2 + 3\left(y + \frac{y_1 - 4y_2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{8}{3}x_1x_2 - \frac{4}{3}x_2^2 - \frac{4}{3}y_1^2 + \frac{8}{3}y_1y_2 - \frac{4}{3}y_2^2,$$

або $\left(x + \frac{x_1 - 4x_2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{y_1 - 4y_2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}(x_1 + x_2)^2 + \frac{4}{9}(y_1 + y_2)^2$. Це рівняння визначає коло з центром у точці $C\left(-\frac{x_1 - 4x_2}{3}; -\frac{y_1 - 4y_2}{3}\right)$ і радіусом $R = \frac{2}{3}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$.

Відповідь: коло $\left(x + \frac{x_1 - 4x_2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{y_1 - 4y_2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}(x_1 + x_2)^2 + \frac{4}{9}(y_1 + y_2)^2$.

3.2.9. 1) Перетворимо до канонічного вигляду рівняння лінії $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 11$, яка обмежує фігуру на координатній площині. Отримаємо коло $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2$ з центром в точці $O'(3; -2)$ і радіусом $R = \sqrt{2}$.

Таким чином, система перетворених нерівностей $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leq 2, \\ x \geq 2 \end{cases}$ описує

внутрішні точки круга, що лежать справа від прямої $x = 2$ (рис. 15).

Точки перетину кола і прямої знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2, \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow M_1(2; -1), M_2(2; -3)$$

.

Вектори $\overline{O'M_1} = (-1; 1)$ і $\overline{O'M_2} = (-1; -1)$

взаємно перпендикулярні, оскільки

$$\overline{O'M_1} \cdot \overline{O'M_2} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0,$$

Тобто кут між радіусами $\alpha = 90^\circ$.

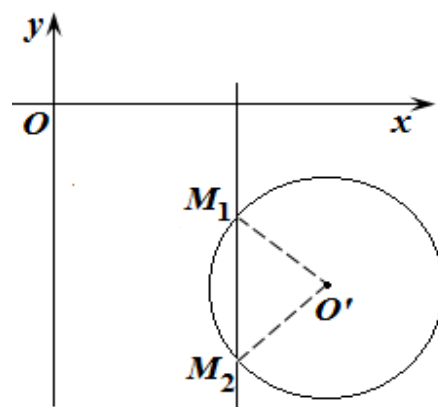


Рис.15

Шукану площу можна знайти, як суму площ кругового сектора $O'M_1M_2$ з центральним кутом 270° і трикутника $O'M_1M_2$:

$$S = S_{\text{сек.}} + S_{\Delta O'M_1M_2} = \frac{3}{4}S_{\text{круга}} + S_{\Delta O'M_1M_2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3\pi}{2} + 1.$$

2) Після перетворень маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 2, \\ y \leq 2-x \end{cases}$$

яка описує внутрішні точки круга, розташовані нижче прямої $y = 2 - x$ (рис. 16).

Знайдемо точки перетину кола і прямої:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x - 4y - 11, & \text{або } 2x^2 - 14x + 23 = 0, \\ y = 2 - x \end{cases}$$

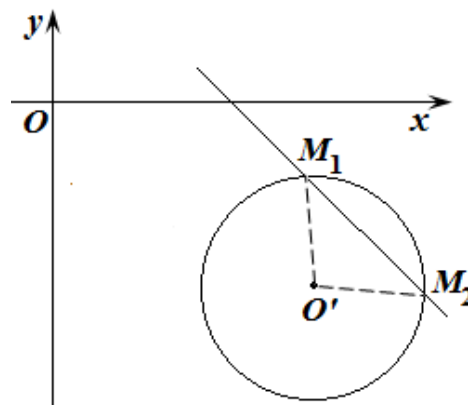


Рис.16

звідки отримаємо точки $M_1\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)$ і $M_2\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}; \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Знайдемо кут між векторами

$$\overrightarrow{O'M_1} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \text{ і } \overrightarrow{O'M_2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right):$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{O'M_1} \cdot \overrightarrow{O'M_2}}{|\overrightarrow{O'M_1}| \cdot |\overrightarrow{O'M_2}|} = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Тоді } S = S_{\text{сек.}} + S_{\Delta O'M_1M_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3\pi}{2} + 1; \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

3.2.10. Прямі $x + 2y - 9 = 0$ (l_1) і $2x - y + 2 = 0$ (l_2) з нормальними векторами $\overline{N_1} = (1; 2)$ і $\overline{N_2} = (2; -1)$ взаємно перпендикулярні, оскільки $\overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$. Це означає, що ΔABC – прямокутний, а центр

описаного навколо нього кола лежить на середині гіпотенузи AB (рис.17). Знайдемо координати точок A і B :

$$\begin{cases} x + 2y - 9 = 0, \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 5).$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 0).$$

Координати центра кола дорівнюють:

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = -1, \quad y = \frac{y_A + y_B}{2} = 2,5,$$

а радіус $R = AB / 2 = 2,5$. Отримали рівняння кола $(x + 1)^2 + (y - 2,5)^2 = 6,25$.

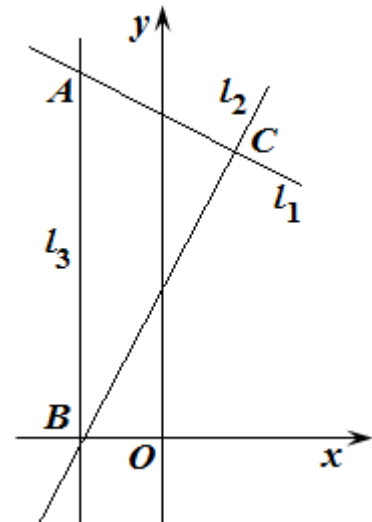


Рис. 17

Відповідь: $(x + 1)^2 + (y - 2,5)^2 = 6,25$.

3.2.11. 1) Очевидно, що центр кола лежить на прямій $4x - 3y - 20 = 0$. Тоді координати центра кола можна знайти з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 20 = 0, \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, \quad y = -4, \quad O'(2; -4).$$

Відстань від центра кола до прямої $4x - 3y - 10 = 0$ дорівнює радіусу кола:

$$d = R = \frac{|3 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) - 10|}{\sqrt{16 + 9}} = 2.$$

Отже, рівняння кола: $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$.

Координати центрів кіл знайдемо як точки перетину прямої $y = 3$ з бісектрисами кутів, утворених прямими $y = 0$ і $3x - 4y + 8 = 0$ (рис.18):

$$|y| = \frac{|3x - 4y + 8|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow y = \pm \frac{3x - 4y + 8}{5}.$$

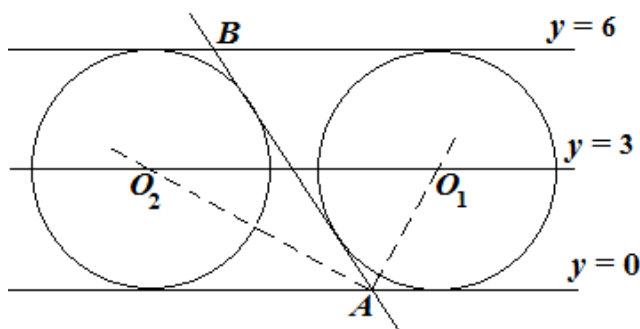


Рис. 18

Маємо дві прямі

$$3x - 9y + 8 = 0 \text{ і } 3x + y + 8 = 0$$

з кутовими коефіцієнтами

$$k_1 = \frac{1}{3} \text{ і } k_2 = -3 \text{ відповідно.}$$

Координати точки A визначимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-8/3; 0).$$

Отже, рівняння бісектрис мають вигляд: $y - 0 = \frac{1}{3}(x + 8/3)$ і $y - 0 = -3(x + 8/3)$,

або $3x - 9y + 8 = 0$ і $3x + y + 8 = 0$. Знайдемо координати центрів O_1 і O_2 :

$$\begin{cases} 3x - 9y + 8 = 0, \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow O_1(19/3; 3); \quad \begin{cases} 3x + y + 8 = 0, \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow O_2(-11/3; 3).$$

Радіуси обох кіл дорівнюють відстані між прямими $y = 0$ та $y = 3$, тобто $R = 3$.

Тоді рівняння шуканих кіл будуть такими:

$$(x - 19/3)^2 + (y - 3)^2 = 9, \quad (x + 11/3)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Відповіді: $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4,2$; $(x - 19/3)^2 + (y - 3)^2 = 9$;

$$(x + 11/3)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

3.2.12. Запишемо рівняння кола у вигляді $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$, тоді $O_1(2; -1)$ – центр, а $R = 1$ – радіус кола (рис. 19).

Точки $A(-1; -1)$ і $B(3; 2)$ лежать поза колом, оскільки, підставивши їх координати в ліву частину рівняння кола, отримаємо $(-3)^2 + 0^2 > 1$ і $1^2 + 3^2 > 4$ відповідно.

Площа трикутника

$$S \equiv S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h, \quad |AB| = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Площа S буде найбільшою, коли найбільшого значення досягає висота h .

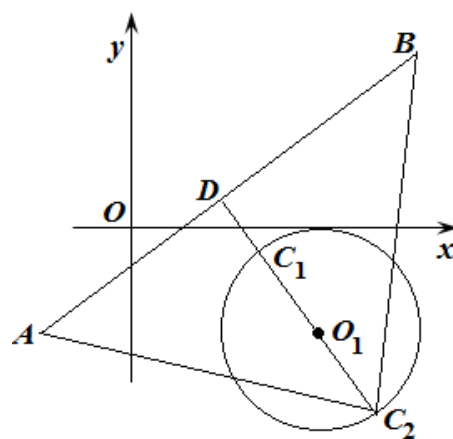


Рис. 19

Висота h буде максимальною, якщо дотична до кола в точці C буде паралельна хорді AB , тобто центр кола буде найбільш віддаленим від $[AB]$. Тому

$h_{\max} = |O_1D| + |O_1C| = d + R = d + 1$. Знайдемо d – відстань від O_1 до (AB) :

$3x - 4y - 1 = 0$. Маємо $d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{5} > R$. Отже, $S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 14 / 5 = 7$.

Для визначення координат точки C запишемо рівняння прямої (DC) , оскільки відомо, що вона проходить через O_1 і перпендикулярна $[AB]$.

Рівняння (AB) $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3}$, тому нормаль до (DC) $\vec{N} = (4; 3)$, отже, рівняння (DC) : $4(x-2) + 3(y+1) = 0$, або $4x + 3y - 5 = 0$.

Координати точки C знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1, \\ 4x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (5-3y)/4, \\ (y+1)^2 = 16/25 \end{cases} \Rightarrow$$

$y+1 = \pm \frac{4}{5}$, $y_1 = -\frac{1}{5}$, $y_2 = -\frac{9}{5}$, $x_1 = \frac{28}{20}$, $x_2 = \frac{13}{5}$. Отримали дві точки $C_1(28/20; -1/5)$ і $C_2(13/5; -9/5)$.

Порівнявши відстані від C_1 та C_2 до прямої (AB) $d_1 = 0,8$ і $d_2 = 2,8$ відповідно, робимо висновок, що C_2 – найбільш віддалена точка кола.

Відповідь: $(13/5; -9/5)$.

3.2.13. Розмістимо початок координат на прямій AB у точці O , що поділяє відстань AB у відношенні $2:1$. Позначимо відстань OB через c , тоді для будь-якої точки $M(x; y)$, яка належить шуканому геометричному місцю точок,

$|AM| = 2|MB|$. Оскільки $\sqrt{(x+2c)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 - 4cx + y^2 = 0$,

звідки маємо $(x-2c)^2 + y^2 = 4c^2$ – коло з центром у точці $(2c; 0)$ і радіусом $R = 2c$.

Відповідь: $(x-2c)^2 + y^2 = 4c^2$.

3.2.14. 1) Нехай $x^2 + y^2 = R^2$ – коло, вписане в квадрат $ABCD$, $M(-x; y)$ – довільна точка кола (рис. 20). Тоді вершини квадрата – точки з координатами: $A(-R; -R)$, $B(-R; R)$, $C(R; R)$ і $D(R; -R)$. Маємо:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (x-R)^2 + (y+R)^2 + (x-R)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 &+(y-R)^2 + (x+R)^2 + (y-R)^2 + (x+R)^2 + (y+R)^2 = \\
 &= 4(x^2 + y^2 + 2R^2) = 4(R^2 + 2R^2) = 12R^2 = 3a^2,
 \end{aligned}$$

де a – сторона квадрата.

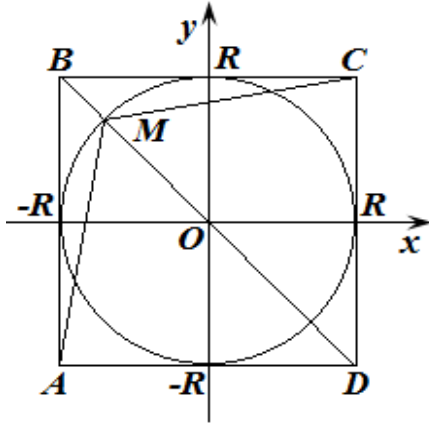


Рис. 20

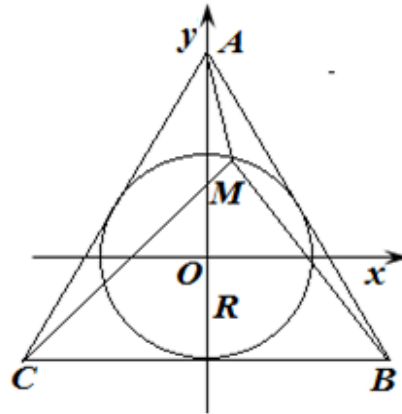


Рис. 21

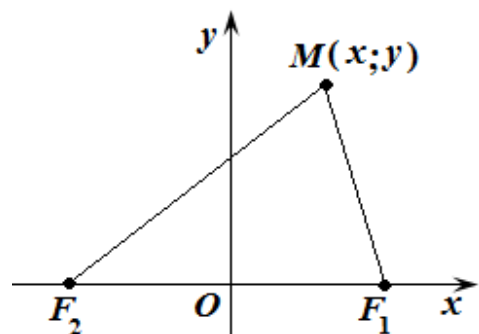
2) Нехай $x^2 + y^2 = R^2$ – коло, що вписано в правильний трикутник зі стороною a , і $M(x; y)$ – довільна точка кола (рис. 21). Центр кола, вписаного в правильний трикутник, знаходиться в точці перетину медіан, висот, бісектрис і серединних перпендикулярів. Тоді вершини трикутника мають координати: $A(0; 2R)$, $B(\sqrt{3}R; -R)$, $C(-\sqrt{3}R; -R)$. Сума квадратів відстаней від точки M до вершин трикутника:

$$\begin{aligned}
 MA^2 + MB^2 + MC^2 &= x^2 + (y - 2R)^2 + (x - \sqrt{3}R)^2 + (y + R)^2 + \\
 &+ (x + \sqrt{3}R)^2 + (y + R)^2 = 15R^2 = \frac{15 \cdot a^2 \cdot 3}{36} = \frac{5a^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $3a^2$; 2) $\frac{5a^2}{4}$.

3.2.15. За умовою периметр трикутника $\triangle F_1F_2M$: $P = 32$ (рис.22).

Скористаємося визначенням еліпса: це множина точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок площини (фокусів), є сталою величиною.



Виберемо систему координат так,
щоб нерухома основа трикутника $[F_1F_2]$
була розташована на осі Ox і $OF_1 = OF_2$.

Рис. 22

Тут F_1 і F_2 – фокуси еліпса, відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c = 12$, $c = 6$.
Нехай точка $M(x; y)$ – рухома вершина трикутника. За визначенням еліпса сума
довжин бічних сторін трикутника дорівнює $F_1M + F_2M = 2a$, де a – велика піввісь
еліпса. Тоді $2a = P - F_1F_2 = 32 - 12 = 20$, $a = 10$.

Знайдемо малу піввісь $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$. Канонічне рівняння
еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ запишемо у вигляді $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1$, або $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

3.2.16. Нехай еліпс задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Через шукану точку
 $M(x; y)$ проведемо пряму $(x + mt; y + nt)$. Знайдемо точки перетину цієї прямої
з еліпсом. Відповідне значення параметра t є розв'язком рівняння
 $\frac{(x + mt)^2}{a^2} + \frac{(y + nt)^2}{b^2} = 1$. Перетворимо рівняння до вигляду:

$$(b^2m^2 + a^2n^2)t^2 + 2(b^2mx + a^2ny)t + b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$\text{або } (b^2 - y^2)m^2 + (a^2 - x^2)n^2 + 2mnxy = 0.$$

Пряма буде дотичною до еліпса, якщо має одну спільну точку з ним.
Це означає, що дискримінант отриманого квадратного рівняння дорівнює нулю.
Через цю саму точку проведемо пряму, перпендикулярну до першої, її
напрямний вектор $(-n; m)$. Вона буде дотичною до еліпса за умови, що

$$(b^2 - y^2)n^2 + (a^2 - x^2)m^2 - 2mnxy = 0.$$

Додавши ці два рівняння, отримаємо: $(m^2 + n^2)(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) = 0$. Перший
множник на нуль не обертається, тому $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

Відповідь: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

3.2.17. Рівняння дотичної до еліпса в точці $(x_0; y_0)$ має вигляд $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Відрізки, що відтинаються дотичною на осях координат, дорівнюють $\frac{a^2}{x_0}$

і $\frac{b^2}{y_0}$. Тоді площа трикутника дорівнює $S = \frac{ab}{2} \cdot \left| \frac{a}{x_0} \cdot \frac{b}{y_0} \right|$. Оскільки $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$,

$$\text{то } \left| \frac{x_0}{a} \right| \cdot \left| \frac{y_0}{b} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Рівність в цьому виразі матиме місце при $\left| \frac{x_0}{a} \right| = \left| \frac{y_0}{b} \right|$. Отже, шукані точки мають координати $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}; \pm \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$.

Відповідь: $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}; \pm \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$.

3.2.18. Нехай точки A і B мають координати $A(0; y)$, $B(x; 0)$, точка $C(x_C; y_C) \in [AB]$ і віддалена від A на відстань 1 (рис.23). Точка

C поділяє $[AB]$ у відношенні $\lambda = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{1}{2}$, знайдемо її координати

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} = \frac{0 + x/2}{1 + 1/2} = \frac{x}{3};$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} = \frac{y + 0/2}{1 + 1/2} = \frac{2y}{3}.$$

За умовою $|AB| = 3$, тоді $|AB|^2 = x^2 + y^2 = 9$.

Підставивши в останню рівність $x = 3x_C$, $y = 3y_C / 2$, отримаємо $9x_C^2 + 9y_C^2 / 4 = 9$.

Отже, точка C рухається по чверті еліпса $x^2 + y^2 / 4 = 1$.

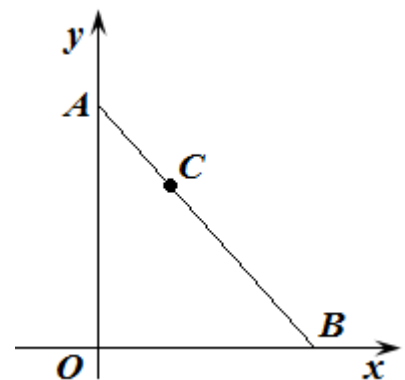


Рис.23

Відповідь: чверть еліпса $x^2 + y^2 / 4 = 1$.

3.2.19. Рівняння дотичної, проведеної до

еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M_0(x_0; y_0)$

(рис. 24), має вигляд $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, або

$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0$. Відстані від фокусів

$F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, до дотичної дорівнюють

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} \left(-\frac{x_0}{a^2} \sqrt{a^2 - b^2} - 1 \right) \quad \text{і} \quad d_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} \left(\frac{x_0}{a^2} \sqrt{a^2 - b^2} - 1 \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad d_1 d_2 &= \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \left(1 - \frac{x_0^2}{a^4} (a^2 - b^2) \right) = \frac{a^4 b^4}{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4} \cdot \frac{a^4 - x_0^2 a^2 + x_0^2 b^2}{a^4} = \\ &= \frac{b^4}{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4} \cdot \left(a^4 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^4} \right) + x_0^2 b^2 \right) = \frac{b^4}{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4} \cdot \left(a^4 \frac{y_0^2}{b^2} + x_0^2 b^2 \right) = \\ &= \frac{b^4}{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4} \cdot \frac{a^4 y_0^2 + x_0^2 b^4}{b^2} = b^2 \quad \text{— що й треба було довести.} \end{aligned}$$

3.2.20. При $a > b$ всі точки еліпса

розміщується в крузі радіуса $R = a$, а це

означає, що відстань між двома точками

еліпса не перевищує $2a$ — що й треба було

довести (рис. 25).

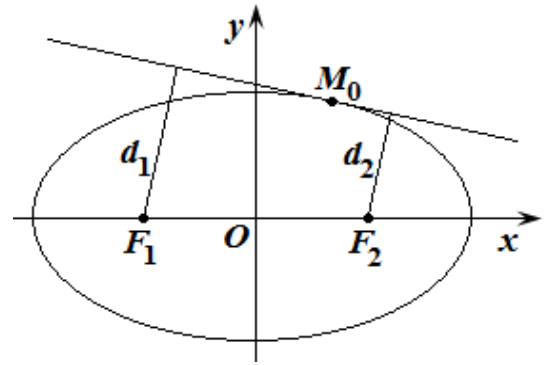


Рис. 24

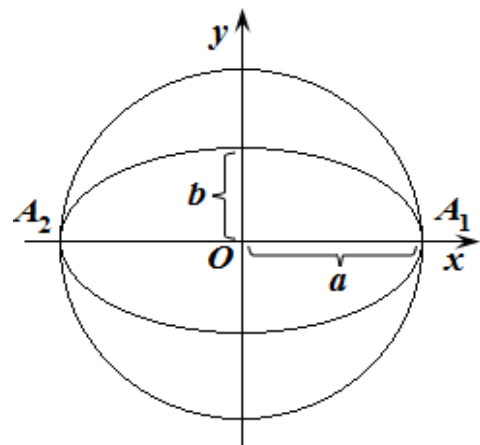


Рис. 25

2.21. Зведемо рівняння кола $x^2 + y^2 + 4x - 144 = 0$ до канонічного вигляду: $(x + 2)^2 + y^2 = 148$. Центром кола є точка $O_1(-2; 0)$, яка лежить на осі Ox (рис.26). Парабола симетрична відносно осі Ox . В правильному трикутнику $\triangle AOB$ сторона OC – медіана, висота і бісектриса.

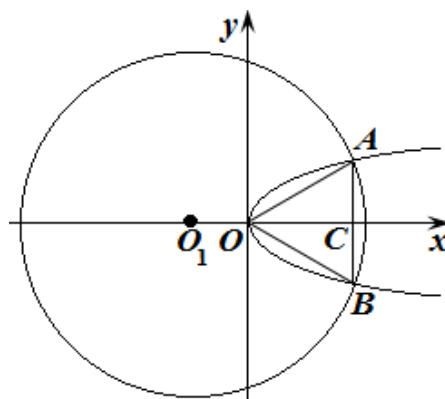


Рис. 26

Нехай довжина сторони $OA = a$, тоді $OC = \frac{\sqrt{3}a}{2}$, $AC = \frac{a}{2}$.

Координати вершин трикутника $A\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.

За умови, що точка A належить колу, маємо:

$$\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} - 144 = 0, \quad a^2 + 2\sqrt{3}a - 144 = 0 \Rightarrow$$

$a_1 = -8\sqrt{3}$ – не підходить, $a_2 = 6\sqrt{3}$, отже, $A(9; 3\sqrt{3})$. Підставимо координати точки A в рівняння параболи і знайдемо параметр p : $9 \cdot 3 = 2 \cdot p \cdot 9 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$. Рівняння параболи $y^2 = 2 \cdot \frac{3}{2}x$, або $y^2 = 3x$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$; $y^2 = 3x$.

2.22. Нехай початок координат збігається з вершиною параболи, а додатній напрямок осі Ox – з віссю симетрії. Тоді рівняння параболи матиме вигляд $y^2 = 2px$. Оскільки радіус дзеркала $R = \frac{D}{2} = \frac{15}{4}$ см, а глибина – 5 см, то точка, що належить параболі, має координати $M\left(5; \frac{15}{4}\right)$. Підставивши координати

точки M у рівняння параболи, знайдемо параметр p : $\left(\frac{15}{4}\right)^2 = 2p \cdot 5 \Rightarrow p = \frac{45}{32}$.

Фокус дзеркала знаходиться в точці $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, тобто $F\left(\frac{45}{64}; 0\right)$.

Відповідь: $F\left(\frac{45}{64}; 0\right)$.

2.23. Центр ваги трикутника – точка перетину його медіан. Зокрема, будь-яка медіана, проведена з точки C , проходить через середину відрізка AB , тобто через точку $O(0; 0)$.

Шукана точка $M(t; z)$ поділяє відрізок OC у відношенні 2:1, рахуючи від точки C . Це означає, що $\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{OC}$. Тому координати t, z можна знайти

як $t = \frac{x}{3}, z = \frac{y}{3}$. З цих співвідношень отримаємо

$$z = \frac{y(x)}{3} = \frac{y(3t)}{3} = \frac{9t^2 - 18t + 15}{3} = 3t^2 - 6t + 5.$$

Відповідь: $y = 3x^2 - 6x + 5$.

3.2.24. 1). Нехай x_1, x_2 – абсциси вершин квадрата ($x_2 > x_1$), тоді $x_2 - x_1 = |y(x_1)| = |y(x_2)|$, тому розглянемо випадки:

а) $y(x_k) > 0, k = 1, 2$; **б)** $y(x_k) < 0, k = 1, 2$ (рис.27).

$$\text{У випадку а)} \begin{cases} x_2 - x_1 = x_1 - x_1^2, \\ x_2 - x_1 = x_2 - x_2^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1, \text{ тому}$$

$$x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

але підходить тільки $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$. Тоді

$$x_2 = 1 - x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{і} \quad S_1 = (x_2 - x_1)^2 = 9 - 4\sqrt{5}.$$

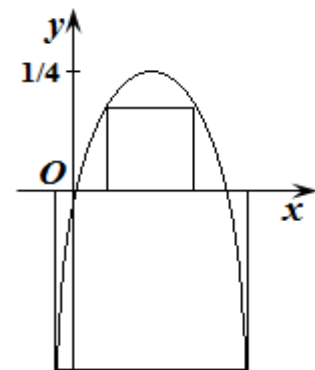


Рис. 27

У випадку **б)** $x_2 - x_1 = -y(x_1) = x_1^2 - x_1 = x_2^2 - x_2 = -y(x_2)$, $x_1 + x_2 = 1$. Тоді $x_1^2 = x_2 = 1 - x_1 \Rightarrow x_1^2 + x_1 - 1 = 0$, підходять тільки $x_1 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 0$ і

$$x_2 = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1. \quad \text{Тому} \quad x_2 - x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5};$$

$$S_2 = (x_2 - x_1)^2 = (2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}.$$

2). Для квадрата $y_1 = 2x_1$ (рис.28). Тоді
 $S = 2x_1 y_1 = 4x_1^2$.

Оскільки $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, то маємо

$$2x_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2} \Rightarrow x_1^2 = \frac{a^2 b^2}{4a^2 + b^2}.$$

Отже, площа $S = \frac{4a^2 b^2}{4a^2 + b^2}$.

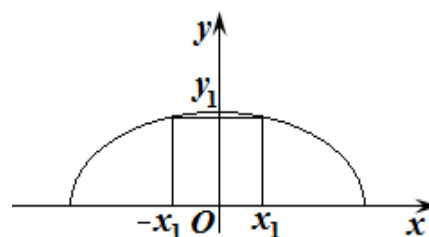


Рис. 28

Відповідь: 1. а) $S = 9 - 4\sqrt{5}$; **1.б)** $S = 9 + 4\sqrt{5}$; **2)** $S = \frac{4a^2 b^2}{4a^2 + b^2}$.

3.2.25. Рівняння параболи $y^2 = 4x$. Центр вписаного кола лежить на осі Ox і має координати $O'(x_0; 0)$, радіус кола $R = x_0$ (рис.29). Канонічне рівняння кола $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ запишемо у вигляді $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2$.

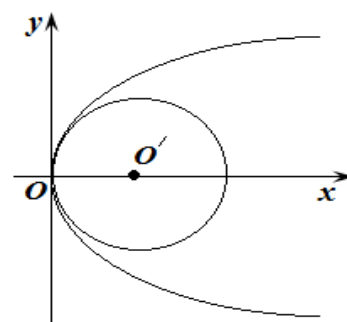


Рис. 29

Оскільки коло дотикається до параболи, виключимо змінну y з системи рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ (x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2 \end{cases} \Rightarrow (x - x_0)^2 + 4x = x_0^2, \text{ або } x^2 + (4 - 2x_0)x = 0.$$

Координату x_0 знайдемо за умови, що дискримінант отриманого рівняння дорівнює нулю:

$$D = (4 - 2x_0)^2 = 0 \Rightarrow 2x_0 = 4, \quad x_0 = 2, \quad R = 2.$$

Відповідь: $R = 2$.

3.2.26. 1). Зведемо рівняння $x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0$ до канонічного вигляду: $(x - 1)^2 + y^2 = 25$. Маємо коло з центром в точці $O'(1; 0)$ і радіусом $R = 5$.

Оскільки відстань від O' до прямої $3x - 4y + 23 = 0$ (l)

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 23|}{5} = 5\frac{1}{6} > R, \text{ то пряма не перетинає коло (рис. 30).}$$

Для знаходження найкоротшої відстані від прямої до кола проведемо дотичні до кривої, паралельні прямій (l) . Радіус, що з'єднує O' з точкою дотику, перпендикулярний до дотичної, а значить і до прямої (l) . Нормальний вектор (l) буде напрямним вектором прямої M_1M_2 .

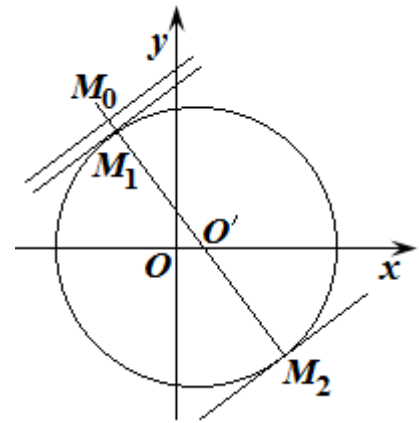


Рис. 30

Тоді рівняння M_1M_2 набуває вигляду $\frac{x-1}{3} = \frac{y-0}{-4}$, або $4x + 3y - 4 = 0$.

Координати точок дотику знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0, \quad M_1(-2; 4), \quad M_2(4; -4).$$

Найближчою до прямої (l) є точка M_1 . Точку M_0 визначимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 23 = 0, \\ 4x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{53}{25}, \quad y = \frac{104}{25}, \quad M_0\left(-\frac{53}{25}; \frac{104}{25}\right).$$

Найкоротша відстань $|M_0M_1| = d = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 + 23|}{5} = 0,2$.

2). Пряма $x + y + 5 = 0$ (l) не перетинає параболу, оскільки система рівнянь

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0, \\ y^2 = 16x, \end{cases}$$

яка зводиться до рівняння $y^2 + 16y + 80 = 0$, не має розв'язку ($D = -64 < 0$) (рис. 31). Запишемо рівняння дотичної до параболи, що паралельна прямій (l) : $x + y = C$. Сталу C знайдемо за умови, що $M_1(x_1; y_1)$ – точка дотику:

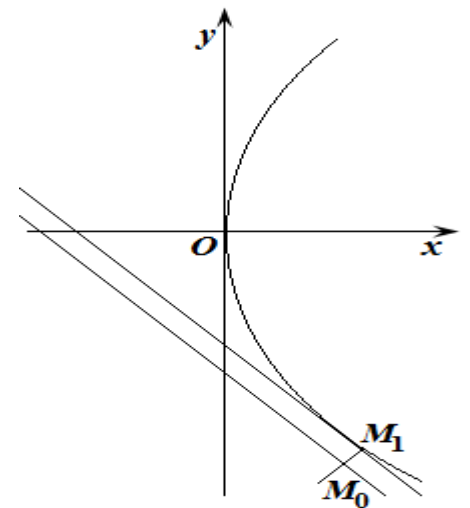


Рис. 31

$$\begin{cases} x + y = C, \\ y^2 = 16x \end{cases} \Rightarrow y^2 + 16y - 16C = 0, \quad D = 256 + 64C = 0, \quad C = -4.$$

Тоді рівняння дотичної (l_1) набуває вигляду $x + y + 4 = 0$, а точка дотику – це точка $M_1(4; -8)$. Найближча до кривої точка M_0 є перетином перпендикуляра до дотичної (l_1), що проходить через M_1 , з прямою (l). Нормальний вектор дотичної $\vec{N} = (1; 1)$ є напрямним вектором перпендикуляра M_0M_1 . Отже, рівняння M_0M_1 : $\frac{x-4}{1} = \frac{y+8}{1}$, або $x - y - 12 = 0$. Координати M_0 знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0, \\ x - y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0\left(\frac{7}{2}; -\frac{17}{2}\right).$$

Найближча відстань від точки M_0 до параболи дорівнює

$$|M_0M_1| = \sqrt{\left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(-8 + \frac{17}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) Переконаємося, що еліпс $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ не має спільних точок з прямою $2x - 3y + 25 = 0$. Це можна зробити двома способами:

а) знайти дискримінант квадратного рівняння, отриманого виключенням, наприклад, y з системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y + 25 = 0, \\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{25}{3}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 72 \end{cases} \Rightarrow 8x^2 + 100x + 553 = 0,$$

$$D = 10000 - 17696 = -7696 < 0, \text{ отже, спільних точок немає.}$$

Треба зауважити, що такий підхід можна застосовувати завжди.

б) в даному випадку найпростіше знайти відстань від центра еліпса $O(0; 0)$ до прямої та переконатись, що вона більша за велику піввісь (це найбільша відстань від центра еліпса до будь-якої точки заданої прямої) (рис.32):

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 25|}{\sqrt{13}} = \frac{25}{\sqrt{13}} > 3\sqrt{2}.$$

Для визначення найкоротшої відстані від еліпса до прямої проведемо дотичну до еліпса паралельно прямій (l),

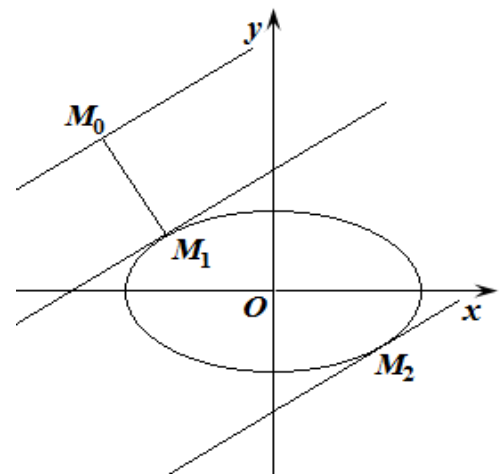


Рис. 32

яка має рівняння $2x - 3y + C = 0$. Систему рівнянь отриманої прямої та заданого еліпса зведемо до квадратного рівняння

$$4x^2 + 9\left(\frac{2x+C}{3}\right)^2 = 72, \text{ або } 8x^2 + 4Cx + (C^2 - 72) = 0.$$

Прирівнявши дискримінант до нуля, знайдемо сталу C :

$$D = -16C^2 + 2304 = 0 \Rightarrow C^2 = 144, \quad C = \pm 12.$$

Отримаємо дві дотичні $2x - 3y + 12 = 0$ і $2x - 3y - 12 = 0$. Найближчою до прямої $2x - 3y + 25 = 0$ буде точка дотику M_1 , а M_2 – найбільш віддалена від цієї прямої точка еліпса.

Координати точок M_1 і M_2 дістанемо з отриманого вище квадратного рівняння при $C = \pm 12$ (це будуть абсциси $x_{1,2} = \mp 3$), а ординати – з рівнянь дотичних

$$y_1 = \frac{2(-3) + 12}{3} = 2 \text{ та } y_2 = \frac{2 \cdot 3 - 12}{3} = -2 \text{ відповідно. Отже, маємо точки}$$

$$M_1(-3; 2) \text{ і } M_2(3; -2).$$

Для визначення найближчої до еліпса точки M_0 складемо рівняння прямої (M_1M_0), яка перпендикулярна до $2x - 3y + 12 = 0$ і проходить через точку

$$M_1. \text{ Маємо } \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow 3x+2y+5=0 \text{ і розв'язуємо систему рівнянь:}$$

$$\begin{cases} 3x+2y+5=0, \\ 2x-3y+25=0 \end{cases} \Rightarrow x=-5, \quad y=5, \quad M_0(-5; 5).$$

Отож, найкоротша відстань від еліпса до заданої прямої $|M_0M_1| = \sqrt{13}$.

Відповідь: 1) $M_0\left(-\frac{53}{25}; \frac{104}{25}\right)$, 0,2; 2) $M_0\left(\frac{7}{2}; -\frac{17}{2}\right)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $M_0(-5; 5)$, $\sqrt{13}$.

3.2.27. Для того, щоб з'ясувати взаємне розташування еліпса і прямої,

розглянемо систему рівнянь:
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \\ Ax + By + C = 0. \end{cases}$$
 Виключимо невідому y з

першого рівняння і дослідимо його:

$$\begin{cases} x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{A^2}{b^2 B^2} \right) + \frac{2AC}{b^2 B^2} x + \left(\frac{C^2}{b^2 B^2} - 1 \right) = 0, \\ y = -\frac{A}{B} x - \frac{C}{B}. \end{cases}$$

Дискримінант рівняння $D = 4 \cdot \frac{a^2 A^2 + b^2 B^2 - C^2}{a^2 b^2 B^2}$. Розглянемо такі випадки:

1) $D = 0$, тобто $a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$ – умова того, що пряма дотикається до еліпса;

2) $D > 0$, $a^2 A^2 + b^2 B^2 > C^2$ – пряма перетинає еліпс у двох точках;

3) $D < 0$, $a^2 A^2 + b^2 B^2 < C^2$ – пряма проходить поза еліпсом.

Відповідь: $a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$ – пряма дотикається еліпса; $a^2 A^2 + b^2 B^2 > C^2$ – пряма перетинає еліпс у двох точках; $a^2 A^2 + b^2 B^2 < C^2$ – пряма проходить поза еліпсом.

3.2.28. Запишемо рівняння дотичної до еліпса $3x^2 + y^2 = 3$, паралельної прямій $x + y - 5 = 0$, у вигляді $x + y - C = 0$. Для визначення C розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3, \\ x + y - C = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - 2xC + (C^2 - 3) = 0$. За умови, що пряма

дотикається до еліпса, дискримінант $D = 4C^2 - 16(C^2 - 3) = 0$, $C^2 = 4$, звідки $C = \pm 2$. Тоді рівняння дотичних матимуть вигляд $x + y = \pm 2$.

Відповідь: $x + y = \pm 2$.

3.2.29. Нехай $(x_0; y_0)$ – точка дотику. Рівняння дотичної має вигляд $3xx_0 + 8yy_0 - 45 = 0$. З умови задачі випливає, що відстань від початку координат до точки дотику $p = 3 = \frac{45}{\sqrt{9x_0^2 + 64y_0^2}}$, звідки $3x_0^2 = \frac{225 - 64y_0^2}{3}$. Оскільки точка

$(x_0; y_0)$ належить еліпсу, то її координати задовольняють рівняння еліпса, тому $\frac{225 - 64y_0^2}{3} + 8y_0^2 = 45$, або $225 - 64y_0^2 + 24y_0^2 - 135 = 0$, звідки дістаємо $y_0^2 = \frac{9}{4}$

, $y_0 = \pm \frac{3}{2}$, $x_0^2 = \frac{225 - 64 \cdot \frac{9}{4}}{9} = 9$, $x = \pm 3$. Тобто отримаємо чотири рівняння

$\pm 9x \pm 8 \cdot \frac{3}{2} y - 45 = 0$, або $\pm 3x \pm 4y - 15 = 0$. Отже, маємо чотири дотичні: $3x + 4y - 15 = 0$, $3x + 4y + 15 = 0$, $3x - 4y - 15 = 0$, $-3x + 4y - 15 = 0$.

Відповідь: $\pm 3x \pm 4y - 15 = 0$.

3.2.30. Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Фокуси еліпса розташовані на відстані c від його центра, тоді за умовою задачі $c = 3$.

Розглянемо систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 5 - x, \end{cases}$ яка після виключення невідомого

y зводиться до рівняння $b^2x^2 + a^2(x - 5)^2 = a^2b^2$. Враховуючи, що $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - 9$, маємо $(2a^2 - 9)x^2 - 10a^2x + a^2(34 - a^2) = 0$. Оскільки пряма дотикається еліпса, то $D = 0$, тобто $a^2(a^4 - 26a^2 + 153) = 0$ ($a \neq 0$, $a > 3$).

Маємо $a^2 = 17$, $b^2 = 17 - 9 = 8$. Дістаємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

3.2.31. З міркувань симетрії спільні дотичні до обох еліпсів мають рівняння $y = -x + C$ (1), $y = -x - C$ (2), $y = x + C$ (3), $y = x - C$ (4).

Будемо шукати дотичну до першого еліпсу у вигляді (1), її кутовий коефіцієнт $k = -1$. Очевидно, точка дотику $M_0(x_0; y_0)$ знаходиться у першому квадранті.

У першому квадранті рівняння першого еліпса матиме вигляд $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}$.

Кутовий коефіцієнт в точці дотику $k = y'(x_0) = -1$, тобто $-\frac{2x_0}{5\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{5}}} = -1$,

звідки дістанемо $x_0^2 = \frac{25}{5+4} = \frac{25}{9}$, $x_0 = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$.

Після підстановки x_0 в рівняння еліпса знаходимо $y = \frac{4}{\sqrt{5+4}} = \frac{4}{3}$.

Оскільки координати точки M_0 задовольняють рівняння першої дотичної, то $\frac{4}{3} = -\frac{5}{3} + C$, тобто $C = 3$. Всі чотири дотичні до еліпсів можна записати одним рівнянням $y = \pm x \pm 3$.

Відповідь: $y + x \pm 3 = 0$, $x - y \pm 3 = 0$.

3.2.32. Покажемо спочатку, що вершини квадрата, описаного навколо еліпса

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ лежать на колі $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (рис. 33).

Нехай $A(x_1; y_1)$ – вершина квадрата, тоді сторони квадрата AB і AD , що дотикаються до еліпса, взаємно перпендикулярні. Рівняння прямих (AB) і (AD) можна записати у вигляді $y - y_1 = k(x - x_1)$, або $kx - y + y_1 - kx_1 = 0$. Використовуючи умову дотику прямої та еліпса з 3.2.27, отримаємо

$$k^2 a^2 + b^2 = (y_1 - kx_1)^2, \quad \text{або}$$

$$k^2(a^2 - x_1^2) + 2x_1 y_1 k + b^2 - y_1^2 = 0.$$

Це рівняння визначає кутові коефіцієнти k_1 і k_2 обох дотичних (AB) і (AD) . Тоді $k_1 k_2 = -1$ (умова перпендикулярності прямих). За теоремою Вієта отримуємо

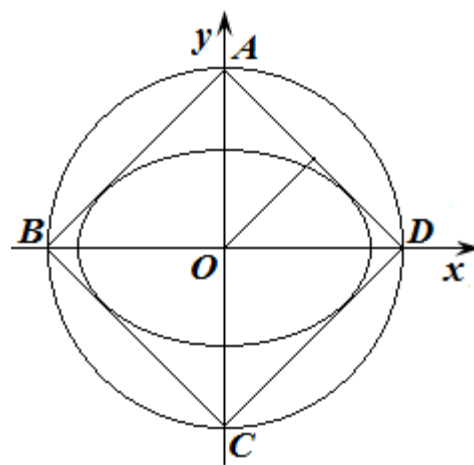


Рис. 33

$$k_1 k_2 = -1 = (b^2 - y_1^2) / (a^2 - x_1^2) \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2.$$

Зауважимо, що рівняння $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ задовольняють координати вершини будь якого прямого кута, сторони якого дотикаються до еліпса (це випливає з наведеного міркування). Запишемо тепер рівняння дотичної у вигляді $y = kx + m$. Тоді умова її дотику до еліпса має вигляд $k^2 a^2 + b^2 = m^2$. Центр еліпса $O(0; 0)$ є також центром квадрата. Відстань від $O(0; 0)$ до дотичної

$p = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{d}{2}$, де $d = \sqrt{2}R = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ – сторона квадрата. Тоді отримаємо

$$\frac{m^2}{1+k^2} = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad \text{або} \quad \frac{k^2 a^2 + b^2}{1+k^2} = \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow$$

$$k^2 = 1, \quad k = \pm 1 \quad \text{і} \quad m = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отже, рівняння сторін квадрата можна записати одним рівнянням

$$y = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \pm x.$$

Відповідь: $y = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \pm x$.

3.2.33. 1) Розглянемо параболу $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Виключимо змінну y з системи рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx + b \end{cases} \Rightarrow k^2 x^2 + x(2kb - 2p) + b^2 = 0.$$

Для того, щоб з'ясувати взаємне розташування прямої і параболи, знайдемо дискримінант отриманого рівняння $D = 4p(p - 2kb)$. Розглянемо випадки:

а) $D > 0$, тобто $p > 2kb$, тоді рівняння має два різних розв'язки, а це означає, що пряма перетинає параболу у двох точках;

б) $D = 0$, $p = 2kb$ – умова того, що пряма дотикається параболи;

в) $D < 0$, $p < 2kb$ – пряма і параболою не мають спільних точок.

2) У випадку параболи $x^2 = 2py$ ($p > 0$) система рівнянь
$$\begin{cases} x^2 = 2py, \\ y = kx + b \end{cases}$$

зводиться до рівняння $x^2 - 2pkx - 2bp = 0$, дискримінант якого $D = 4p(pk^2 + 2b)$.

а) якщо $D > 0$, $pk^2 + 2b > 0$, то пряма і параболою перетинаються;

б) при $D = 0$, $pk^2 + 2b = 0$ пряма дотикається до параболи;

в) при $D < 0$, $pk^2 + 2b < 0$ пряма проходить поза параболою.

Відповідь: 1) пряма $y = kx + b$ і параболою $y^2 = 2px$: коли $p > 2kb$, пряма перетинає параболу у двох точках; якщо $p = 2kb$, пряма дотикається до параболи; при $p < 2kb$ пряма не має спільних точок з параболою.

2) пряма $y = kx + b$ і параболою $x^2 = 2py$: якщо $pk^2 + 2b > 0$ – пряма і параболою перетинаються в двох точках; $pk^2 + 2b = 0$ – пряма дотикається до параболи; $pk^2 + 2b < 0$ – пряма проходить поза параболою.

3.2.34. Розташуємо параболу так, щоб її вісь співпадала з віссю Oy . Тоді її рівняння матиме вигляд $y = ax^2$. Дотична в точці x має кутовий коефіцієнт $k = y' = 2ax$. Якщо дотичні в точках x_1 і x_2 перпендикулярні, то $k_1 \cdot k_2 = -1$, звідки $4a^2 x_1 x_2 = -1$. Отже, добуток відстаней від A і B до осі Oy дорівнює $|x_1 x_2| = \frac{1}{4a^2}$, тобто є сталою величиною.

Зрозуміло, що для будь-якої параболи з віссю, паралельною осі Oy , а також для параболи, вісь якої паралельна Ox , матимемо такий самий результат.

Відповідь: не залежить.

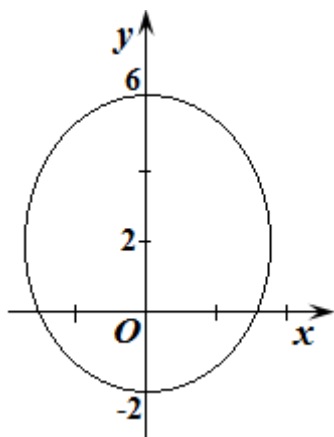


Рис. 34

3.2.35. Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Оскільки вершини еліпса знаходяться в точках $M_1(0; 6)$ і $M_2(0; -2)$, то центр еліпса має координати

$$x_0 = 0, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2 \quad (\text{рис.34}).$$

Вісь $2b = |M_1M_2| = 8 \Rightarrow b = 4$. За умовою еліпс відтинає на осі Ox хорду довжиною 6, тобто проходить через точку $M(3; 0)$.

Щоб знайти параметр a , підставимо у рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

координати точки $M(0; 2)$: $\frac{3^2}{a^2} + \frac{2^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 12$. Таким чином, отримуємо

канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

2.36. Рівняння еліпса шукаємо у

вигляді $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, де

$O'(x_0; y_0)$ – центр еліпса (рис. 35).

Оскільки еліпс перетинає вісь Ox у точках $A(4; 0)$ і $B(10; 0)$, то

координата $x_0 = \frac{10+4}{2} = 7$.

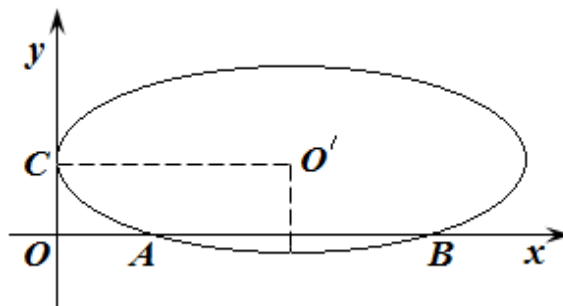


Рис.35

Еліпс дотикається осі Oy в точці $C(0; 2)$. Тож рівняння еліпса набуває вигляду

$$\frac{(x-7)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1.$$

Для визначення параметра b скористаємось тим, що крива проходить через точку $A(4; 0)$:

$$\frac{(4-7)^2}{49} + \frac{(0-2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{b^2} = 1 - \frac{9}{49}, \quad b^2 = \frac{49}{10}.$$

Остаточно рівняння еліпса матиме вигляд $\frac{(x-7)^2}{49} + \frac{10(y-2)^2}{49} = 1$.

Відповідь: $\frac{(x-7)^2}{49} + \frac{10(y-2)^2}{49} = 1$.

3.2.37. Позначимо через $O'(x_0; y_0)$ центр рівносторонньої гіперболи (рис.36). Тоді рівняння гіперболи з віссю симетрії, паралельній осі Oy , шукаємо у вигляді

$$(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = a^2.$$

Оскільки одна з вершин гіперболи знаходиться у точці $(2; 2)$, то $a = b = y_0 - 2$ і рівняння кривої набуває вигляду

$$(y - y_0)^2 - (x - 2)^2 = (y_0 - 2)^2.$$

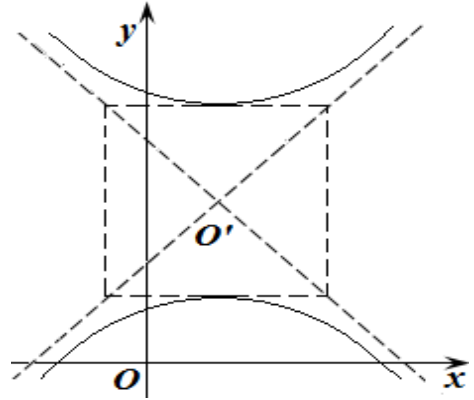


Рис. 36

Знайдемо точки перетину гілки гіперболи з віссю Ox . При $y = 0$ маємо

$$y_0^2 - (x - 2)^2 = (y_0 - 2)^2, \quad (x - 2)^2 = 4(y_0 - 1), \quad x - 2 = \pm 2\sqrt{y_0 - 1},$$

отже, $x_1 = 2 + 2\sqrt{y_0 - 1}, \quad x_2 = 2 - 2\sqrt{y_0 - 1}.$

Довжина хорди, яку гіпербола відтинає на осі Ox , дорівнює 8, тоді

$$|x_1 - x_2| = 4\sqrt{y_0 - 1} = 8, \quad \text{тобто} \quad \sqrt{y_0 - 1} = 2, \quad y_0 = 5.$$

Остаточно рівняння гіперболи запишеться $(y - 5)^2 - (x - 2)^2 = 9$.

Відповідь: $(y - 5)^2 - (x - 2)^2 = 9$.

2.38. Рівняння гіперболи будемо шукати у вигляді $y - kx - b = \frac{m}{x - a}$.

Оскільки гіпербола проходить через точку $(x_0; y_0)$, то $(y_0 - kx_0 - b)(x_0 - a) = m$.

Остаточно рівняння гіперболи виглядатиме: $y = kx + b + m / (x - a)$, де $m = (x_0 - a)(y_0 - kx_0 - b)$.

Відповідь: $y = kx + b + m / (x - a)$, де $m = (x_0 - a)(y_0 - kx_0 - b)$.

3.2.39. Запишемо загальне рівняння кривої другого порядку у вигляді $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Відомо, що коли визначник

коефіцієнтів кривої $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, а визначник старших членів

$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0$, то крива являє собою гіперболу.

Для заданої кривої $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$ маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{vmatrix} = -\frac{45}{4} \neq 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} < 0.$$

Отже, крива являє собою гіперболу. За вказівкою розв'яжемо задане рівняння відносно y і запишемо його у вигляді $y - kx - b = \frac{m}{x-a}$, тоді отримаємо

$$y = \frac{2x^2 - x + 4}{3x - 3}.$$

Після виділення цілої частини $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{5/3}{x-1}$ маємо $y - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{5/3}{x-1}$.

Тому асимптотами гіперболи будуть прямі $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ і $x = 1$, а центр

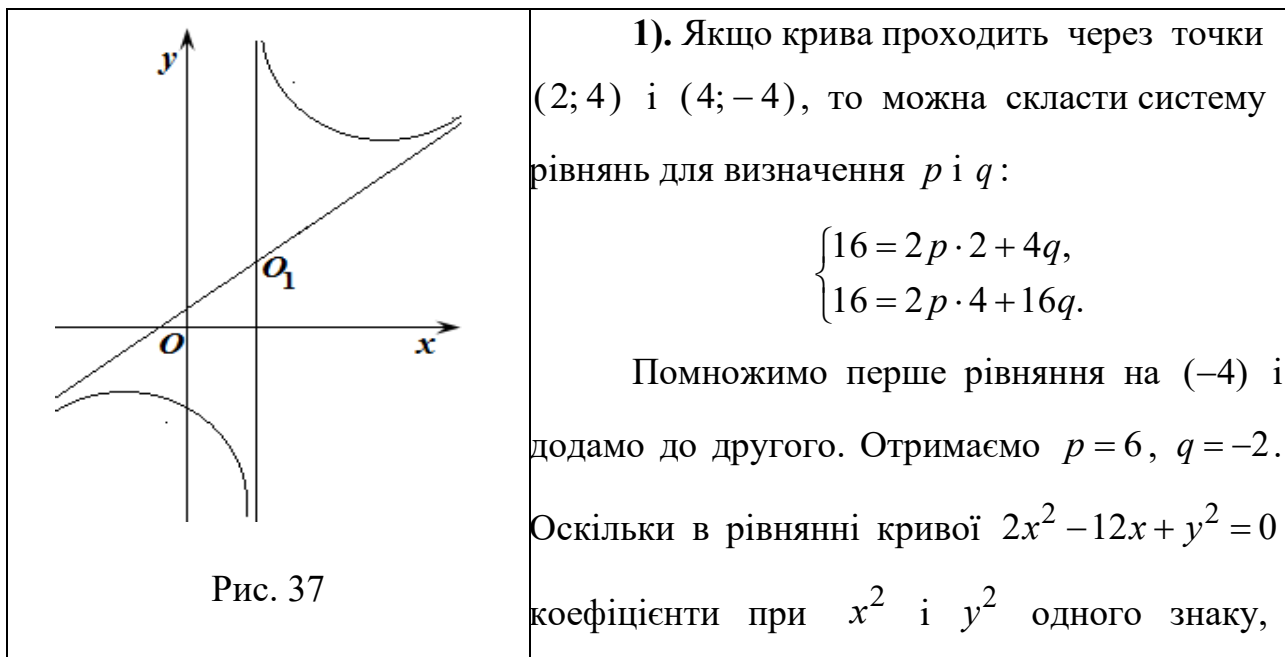
гіперболи – це точка перетину її асимптот $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow O_1(1; 1).$

Для побудови гіперболи корисно знайти декілька її точок, наприклад, $y(0) = -\frac{4}{3}$

, $y(-2) = -\frac{14}{11}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = -2\frac{2}{3}$, $y(2) = \frac{10}{3}$, $y(3) = 3$ (рис. 37).

Відповідь: гіпербола $y - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{5/3}{x-1}$; асимптоти $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $x = 1$.

2.40. Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Враховуючи те, що вісь Ox є віссю симетрії, а вісь Oy дотикається до кривої у вершині, коефіцієнти B , E і F дорівнюють нулю. Тоді рівняння кривої набуває вигляду $y^2 = 2px + qx^2$.



то це крива еліптичного типу. Виділивши повні квадрати змінних, отримаємо канонічне рівняння еліпса

$$2(x^2 - 6x + 9) + y^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2(x-3)^2 + y^2 = 18 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

2). В цьому випадку крива $y^2 = 2px + qx^2$ проходить через точки $(2; 12)$ і $(-6; -12)$, тому параметри p і q знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 144 = 2p \cdot 2 + 4q, \\ 144 = -2p \cdot (-6) + 36q. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на -3 і додавши його до другого, отримаємо $q = 12$, $p = 24$. В рівнянні $y^2 = 2 \cdot 24x + 12x^2$ коефіцієнти при x^2 і y^2 мають різні знаки, отже, маємо криву гіперболічного типу. Виділимо повний квадрат

$$12(x^2 + 4x + 4) - 48 - y^2 = 0 \Rightarrow 12(x+2)^2 - y^2 = 48 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{48} = 1 -$$

канонічне рівняння гіперболи.

Відповідь: 1) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$; 2) $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{48} = 1$.

3.2.41. В точках A і B коло $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ перетинає осі Ox і Oy відповідно (рис.38), отже, $A(\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$, $B(0; \sqrt{a^2 + b^2})$.

Запишемо рівняння хорди AB , як прямої, що проходить через точку $A(\sqrt{a^2+b^2}; 0)$ і нахилена до осі Ox під кутом 135° , тобто має кутовий коефіцієнт $k = -1$: $y - y_A = k(x - x_A)$, або $y = -x + \sqrt{a^2+b^2}$.

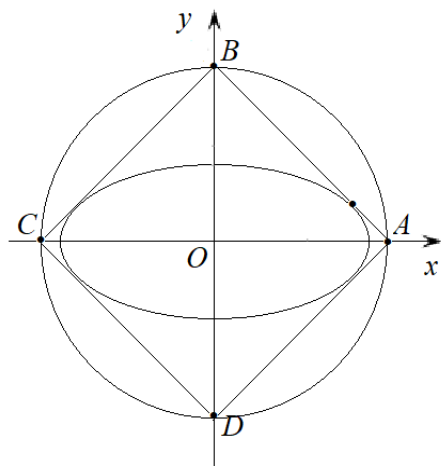


Рис. 38

Дослідимо взаємне розташування заданого еліпса та отриманої хорди з системи

$$\text{рівнянь} \quad \begin{cases} y = \sqrt{a^2+b^2} - x, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

що приводить до квадратного рівняння

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \right) x^2 - \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b^2} x + \frac{a^2}{b^2} = 0.$$

Його дискримінант дорівнює нулю:

$$D = 4 \frac{a^2+b^2}{b^4} - 4 \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} = 4 \frac{a^2+b^2}{b^4} - 4 \frac{a^2+b^2}{b^4} = 0,$$

отже, система має єдиний розв'язок, а хорда AB – одну спільну точку з еліпсом, тобто являє собою дотичну до еліпса, що й треба було довести. В силу симетрії інші хорди BC , CD і DA теж будуть дотичними до еліпса. Отже, хорди, які з'єднують точки перетину кола $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ з осями координат, дотикаються до еліпса $\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$, що й треба було довести.

3.2.42. Рівняння параболи з вершиною в точці $M_0(x_0; y_0)$ і вітками, що спрямовані вниз, шукаємо у вигляді $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$. Оскільки вісь симетрії параболи паралельна осі ординат і перетинає вісь Ox у точках $A(-5; 0)$ і $B(11; 0)$, то її рівняння має вид: $x = 3$. Вершина параболи знаходиться на осі симетрії на відстані $\frac{p}{2}$ від директриси $y = 10$, тоді $x_0 = 3$, $y_0 = 10 - \frac{p}{2}$, і рівняння параболи набуває вигляду

$$(x - 3)^2 = -2p \left(y - 10 + \frac{p}{2} \right).$$

Для визначення параметра p скористаємося тим, що парабола проходить через точку A : $(-5-3)^2 = -2p\left(0-10+\frac{p}{2}\right) \Rightarrow p^2 - 20p + 64 = 0$, $p_1 = 16$, $p_2 = 4$, координата $(y_0)_1 = 2$, $(y_0)_2 = 8$. Отже, парабола має рівняння $(x-3)^2 = -32(y-2)$, або $(x-3)^2 = -8(y-8)$.

Відповідь: $(x-3)^2 = -32(y-2)$, $(x-3)^2 = -8(y-8)$.

3.2.43. Оскільки парабола перетинає еліпс у точках $A(-4; 3)$ і $B(4; 3)$, які розташовані симетрично відносно осі Oy , то ця вісь є віссю параболы (рис.39). Рівняння параболы з вершиною в точці $M_0(0; y_0)$ будемо шукати у вигляді

$$x^2 = \pm 2p(y - y_0) \quad (p > 0).$$

Параметр p дорівнює відстані від фокуса параболы F до директриси $y = 3$.

Розглянемо трикутник $\triangle FCB$:

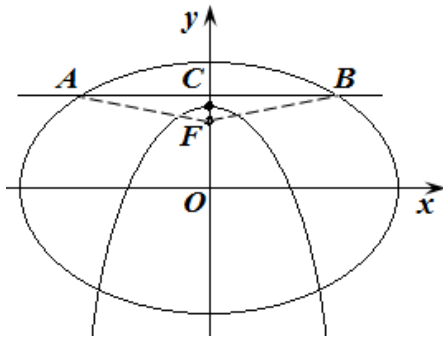


Рис. 39

$$|FC| = p = \sqrt{FB^2 - CB^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = \sqrt{20 - 16} = 2.$$

Якщо вітки параболы спрямовані вниз, то $y_0 = 3 - \frac{p}{2} = 3 - 1 = 2$. В цьому випадку рівняння параболы матиме вигляд $x^2 = -4(y - 2)$ (рис. 39).

Якщо вітки параболы спрямовані вгору, то $y_0 = 3 + \frac{p}{2} = 3 + 1 = 4$, і рівняння параболы набуває вигляду $x^2 = 4(y - 4)$.

Відповідь: $x^2 = -4(y - 2)$; $x^2 = 4(y - 4)$.

3.2.44. Перепишемо рівняння кривої у вигляді $y = (x-1)^2 + 1$. Це парабола з вершиною в точці $(1; 1)$ (рис. 40). Центр шуканого кола матиме координати $(a; -a)$, оскільки лежить на прямій $y = -x$. Отже, рівняння кола набере вигляду

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = 4.$$

Враховуючи, що коло проходить через точку $(1; 1)$, одержимо $(1 - a)^2 + (1 + a)^2 = 4$, звідки $a = \pm 1$.

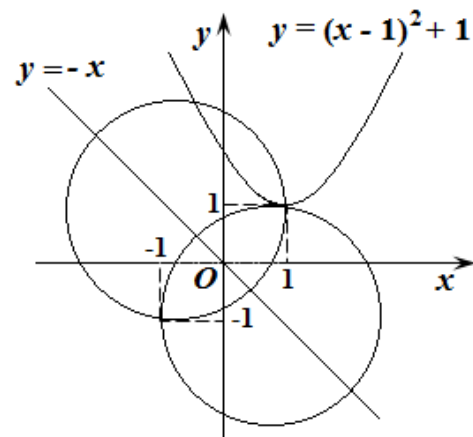


Рис. 40

Таким чином, знайшли два кола з центрами в точках $(1; -1)$ і $(-1; 1)$ відповідно, рівняння яких $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ і $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Відповідь: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

3.2.45. Розглянемо функцію $f(x) = x|x+2a| + a^2 = \begin{cases} (x+a)^2, & x \geq -2a, \\ -x^2 - 2ax + a^2, & x \leq -a. \end{cases}$

З графіка функції (рис.41) видно, що шукана пряма задається або рівнянням $y = -\frac{a}{2}x$, або рівнянням $y = kx$, у якому коефіцієнт k визначається з умови єдиного кореня рівняння $(x+a)^2 = kx$, або $x^2 + (2a-k)x + a^2 = 0$,

дискримінант якого $D = (2a-k)^2 - 4a^2 = k^2 - 4ak = k(k-4a)$

дорівнює нулю при $k=0$ або $k=4a$.

Отже, шукані прямі мають рівняння

$$y=0, \quad y=4ax, \quad y=-\frac{a}{2}x.$$

Відповідь: $y=0$, $y=4ax$, $y=-\frac{a}{2}x$.

Отже, шукані прямі мають рівняння $y=0$,

$$y=4ax, \quad y=-\frac{a}{2}x.$$

Відповідь: $y=0$, $y=4ax$, $y=-\frac{a}{2}x$.

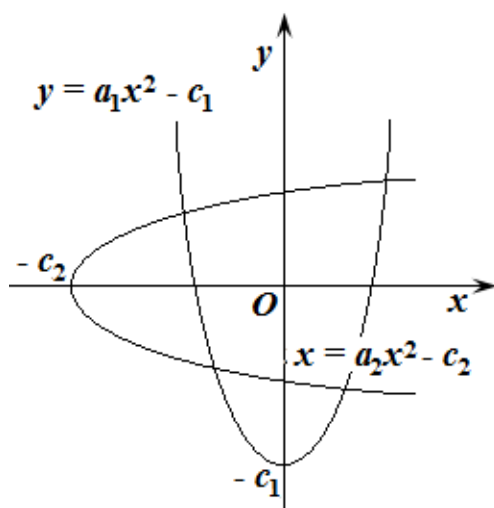
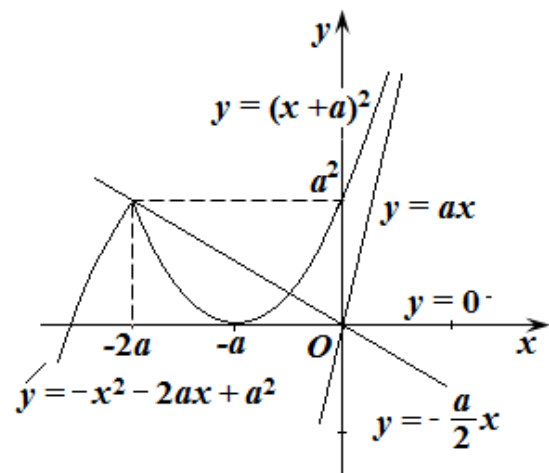


Рис. 42

3.2.46. Виберемо прямокутну декартову систему координат xOy так, щоб осі Ox і Oy збігалися з осями парабол, а вітки парабол були спрямовані в додатних напрямках координатних осей (рис.42).

Тоді рівняння парабол матимуть вигляд

$$y = a_1x^2 - c_1 \quad \text{і} \quad x = a_2y^2 - c_2,$$

де $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Оскільки за умовою параболи перетинаються в чотирьох точках, то $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Нехай $M(x_0; y_0)$ – будь-яка з чотирьох точок перетину парабол. Тоді координати цієї точки задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = a_1 x_0^2 - c_1, \\ x_0 = a_2 y_0^2 - c_2. \end{cases}$$

Поділимо обидві частини першого рівняння на $a_1 \neq 0$, а обидві частини другого рівняння на $a_2 \neq 0$, після чого додамо перше рівняння до другого

$$x_0^2 + y_0^2 - \frac{y_0}{a_1} - \frac{x_0}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_2}{a_2} = 0.$$

Виділивши повні квадрати, дістанемо

$$\left(x_0 - \frac{1}{2a_2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2a_1}\right)^2 = \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{1}{(2a_1)^2} + \frac{1}{(2a_2)^2}.$$

Отже, точка $M(x_0; y_0)$, а також інші три точки перетину лежать на колі з центром у точці $\left(\frac{1}{2a_2}; \frac{1}{2a_1}\right)$ і радіусом $R = \sqrt{\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{1}{4a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2}}$, що й треба було довести.

3.2.47. Оскільки обидва доданки в лівій частині рівняння – невід’ємні числа, то їх сума може дорівнювати нулю тоді й тільки тоді, коли кожен з доданків дорівнює нулю. Отже, маємо

$$1 - x^2 - y^2 = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^2 + (y - x^2)^2 (y + |x|)^2}, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 1/4 = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1/4)^2 + (y - x^2)^2 (y + |x|)^2}. \quad (2)$$

$$\text{Звідси випливає, що} \quad \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 1/4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x^2 + y^2 \geq 1/4. \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

Крім того, рівність у виразах (1) і (2) має місце за умови, що

$$(y - x^2)^2 (y + |x|)^2 = 0, \quad (5)$$

тобто коли один із співмножників дорівнює нулю:

$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y + |x| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ y = -|x|. \end{cases} \quad (6)$$

$$(7)$$

Співвідношення (3) – (4) і (6) – (7) повністю визначають шукане геометричне місце точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють задане рівняння.

Сукупність нерівностей (3) – (4) задає область між двома концентричними колами, а рівняння (6) – (7) визначають розташовані в цій області відрізки двох графіків – параболи $y = x^2$ та ламаної $y = -|x|$, які зображені на рис. 43.

Відповідь:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x^2 + y^2 \geq 1/4, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ y = -|x|. \end{cases}$$

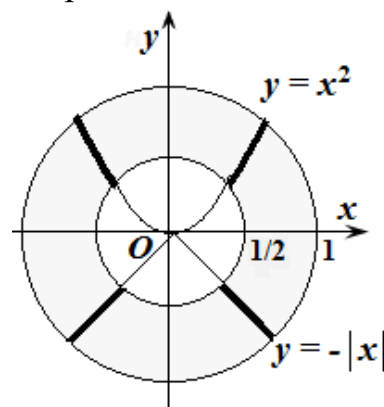


Рис. 43

3.2.48. Нехай A , B і C – точки, в яких парабола $y = x^2 + px + q$ перетинає осі Ox та Oy відповідно (рис.44). Ці точки матимуть координати $A(x_1; 0)$,

$B(x_2; 0)$, $C(0; q)$, де $x_1 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $x_2 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Позначимо через D другу точку перетину з віссю Oy кола, яке проходить через точки A , B і C . За властивістю січних, проведених до кола з однієї точки, маємо

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD. \quad (1)$$

Оскільки $OA = |x_1|$, $OB = |x_2|$, $OC = |q|$ та $x_1 x_2 = q$ за теоремою Вієта, то з (1) отримаємо $OA \cdot OB = |x_1| \cdot |x_2| = |q|$, $OC \cdot OD = |q| OD \Rightarrow OD = 1$.

Звідси виходить, що точка D може мати координати $(0; 1)$ або $(0; -1)$.

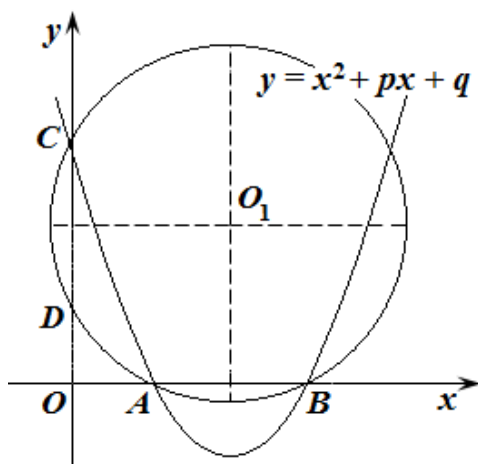


Рис. 44

Доведемо, що це буде точка $D(0; 1)$.

Для цього досить показати, що точка O_1 перетину серединних перпендикулярів $x = -\frac{p}{2}$ до відрізка AB та $y = \frac{q+1}{2}$ до відрізка з кінцями C і $(0; 1)$ є центром кола, проведеного через точки A , B і C .

Оскільки $O_1 A = O_1 B$ за побудовою, то залишається довести, що $O_1 A = O_1 C$.

Точка O_1 має координати $\left(-\frac{p}{2}; \frac{q+1}{2}\right)$, тому запишемо квадрат відрізка O_1C :

$$\begin{aligned} O_1C^2 &= \left(-\frac{p}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2} - q\right)^2 = \frac{p^2 + q^2 - 2q + 1}{4} = \frac{p^2 - 4q}{4} + \frac{(q+1)^2}{4} = \\ &= \left(-\frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2} - 0\right)^2 = O_1A^2, \text{ отже, } O_1A = O_1C. \end{aligned}$$

А це й означає, що точки A , B , C і D параболи $y = x^2 + px + q$ лежать на одному колі, що й треба було довести. Очевидно, при зміні параметрів p і q будуть змінюватись форма параболи і радіуси відповідних кіл, але всі ці кола проходять через точку $D(0;1)$.

3.2.49. Нехай $(x_0; y_0)$ – точка, через яку не проходить жодна з кривих заданого сімейства, тоді координати цієї точки не задовольняють задане рівняння. Таким чином, задача звелася до того, щоб знайти залежність між x і y , при якій задане рівняння не мало б розв'язків. Для цього розглянемо це рівняння як квадратне відносно параметра p :

$$2p^2 - 4px + x^2 - y - 3 = 0.$$

Дискримінант $D = 8x^2 + 8y + 24$ має бути від'ємним, тобто, $y < -x^2 - 3$. Отже, шукану множину утворюють усі точки координатної площини, які лежать нижче параболи $y = -x^2 - 3$.

Відповідь: частина координатної площини, розташована нижче параболи $y = -x^2 - 3$.

3.2.50. Спочатку розглянемо пряму $y = -2x + c$, паралельну заданій, і знайдемо число c таке, щоб парабола $y = x^2 - 8x + 16$ і пряма $y = -2x + c$ дотикались. Для цього треба знайти дискримінант квадратного рівняння

$$x^2 - 8x + 16 = -2x + c$$

і прирівняти його до нуля. Маємо

$$x^2 - 6x + 16 - c = 0, \quad D = 36 - 4(16 - c) = 0, \quad \text{звідки } c = 7.$$

Тоді $x^2 - 6x + 16 - 7 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3; \quad y = -2 \cdot 3 + 7, \quad y = 1.$

Отже, $M(3; 1)$ – точка дотику графіків функцій $y = x^2 - 8x + 16$ і $y = -2x + 7$.

Найкоротша відстань між точками параболи $y = x^2 - 8x + 16$ і прямої $y = -2x + 1$ – це відстань між паралельними прямими $y = -2x + 7$ і $y = -2x + 1$, яка дорівнює відстані від точки $M(3; 1)$ до прямої $y = -2x + 1$.

Відстань від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + D = 0$ знайдемо за формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Тому шукана відстань від точки $M(3; 1)$ до

прямої $2x + y - 1 = 0$ буде дорівнювати $d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Відповідь: $6/\sqrt{5}$.

3.2.51. Нехай точка $M(x; y)$ – довільна точка параболи. Квадрат відстані від точки M_0 до точки M :

$$|M_0M|^2 = d^2 = (x - 4)^2 + y^2 = (x - 4)^2 + 4x = x^2 - 4x + 16.$$

Похідна функції $(d^2)' = 2x - 4$. Прирівнявши $(d^2)'$ до нуля, отримаємо критичну точку $x = 2$, яка є точкою мінімуму, оскільки при переході через цю точку похідна змінює знак з “мінуса” на “плюс”. Після підстановки $x = 2$ в рівняння параболи маємо дві точки $M_1(2; 2\sqrt{2})$ і $M_2(2; -2\sqrt{2})$, відстань від яких до точки M_0 буде найменшою: $d_{\min} = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Відповідь: $2\sqrt{3}$; $M_1(2; 2\sqrt{2})$, $M_2(2; -2\sqrt{2})$.

3.2.52. 1). Приведемо рівняння кривих, що обмежують область зміни $(x; y)$, до канонічного вигляду, для чого виділимо повні квадрати змінних:

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y - 11 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36 \quad (1)$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 9. \quad (2)$$

Отже, перше коло має центр у точці $O_1(3; 4)$ і радіус $R_1 = 6$. Центром другого кола є точка $O_2(2; 0)$, радіус $R_2 = 3$ (рис. 45). Як видно, при переміщенні прямої $6x + 8y = U$ паралельно самій собі величина U набуває значення $U_{\min} = U_1 = U(x_1; y_1)$ в точці $M_1(x_1; y_1)$, в якій вона дотикається до першого кола.

За умови дотику цього кола і прямої

$$\text{маємо: } \frac{|6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - U_1|}{\sqrt{36 + 64}} = R_1 = 6$$

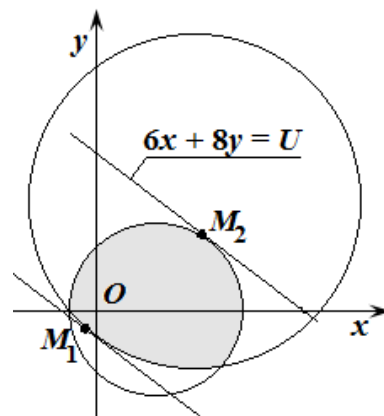


Рис. 45

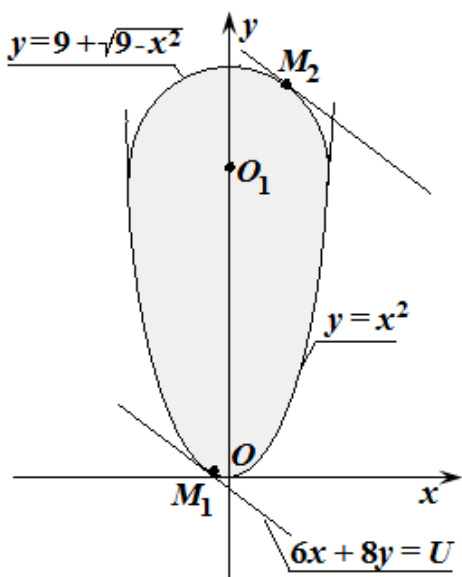


Рис. 46

$\Rightarrow (U_1)_1 = -10, (U_1)_2 = 110$ – не підходить.
Оскільки $U_{\max} = U_2 = U(x_2; y_2)$, сума $U = 6x + 8y$ в точці $M_2(x_2; y_2)$ дотику другого кола і прямої набуває значення: $\frac{|6 \cdot 2 + 8 \cdot 0 - U_2|}{\sqrt{36 + 64}} = R_2 = 3$, або $12 - U_2 = \pm 30$, звідки $(U_2)_1 = 42, (U_2)_2 = -18$ – не підходить. Таким чином, $-10 \leq U \leq 42$.

2). Нерівність $x^2 \leq y \leq 9 + \sqrt{9 - x^2}$ означає, що область зміни $(x; y)$ обмежена знизу параболою $y = x^2$, а зверху півколом $y = 9 + \sqrt{9 - x^2}$ з центром в точці $O_1(0; 9)$ (рис.46).

Зауважимо, що $x^2 \leq 9 + \sqrt{9 - x^2}$, оскільки $x^2 \leq 9$, а права частина ≥ 9 .

З рисунка видно, що при переміщенні прямої $U = 6x + 8y$ паралельно самій собі $U_{\min} = U_1 = U(x_1; y_1)$, де $(x_1; y_1)$ – координати точки M_1 , в якій пряма дотикається до параболи, а $U_{\max} = U_2$ досягається в точці $M_2(x_2; y_2)$, в якій пряма дотикається до кола. Значення U_2 знайдемо з умови дотику кола $x^2 + (y - 9)^2 = 9$ і прямої: $\frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot 9 - U_2|}{\sqrt{36 + 64}} = R = 3 \Rightarrow$

$U_2 - 72 = \pm 30 \Rightarrow (U_2)_1 = 102, (U_2)_2 = 42$ – не підходить.

Для визначення U_1 скористаємося умовою дотику параболи $y = x^2$ і прямої: $pk^2 + 2b = 0$, де $x^2 = 2py$ – парабола, а $y = kx + b$ – пряма. В нашому випадку $p = 1/2, k = -3/4, b = U_1/8$, тобто $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} + 2 \cdot \frac{U_1}{8} = 0 \Rightarrow U_{\min} = U_1 = -\frac{9}{8}$.

Таким чином, $-\frac{9}{8} \leq U \leq 102$.

Відповідь: 1) $-10 \leq U \leq 42$; 2) $-\frac{9}{8} \leq U \leq 102$.

3.2.53. Застосувавши рівняння прямої, що проходить через дві точки A і B знайдемо рівняння сторони AB трикутника $\triangle ABC$: $\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-2}{1-2}$, або $x - 4y + 6 = 0$. Переконаємось, що пряма AB лежить поза еліпсом. Для цього

$$\text{розглянемо систему рівнянь} \begin{cases} x - 4y + 6 = 0, \\ x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y - 6 = 0, \\ (4y - 6)^2 + 4y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20y^2 + 48y + 31 = 0, \quad D = -176 < 0.$$

Тобто, пряма і еліпс не мають спільних точок (рис.47).

Площа трикутника $\triangle ABC$ буде мінімальною, якщо точка $C(x_0; y_0)$ – найближча до відрізка $[AB]$ точка еліпса

$$x^2 + 4y^2 = 5.$$

Іншими словами,

$C(x_0; y_0)$ є точкою дотику до еліпса

дотичної,

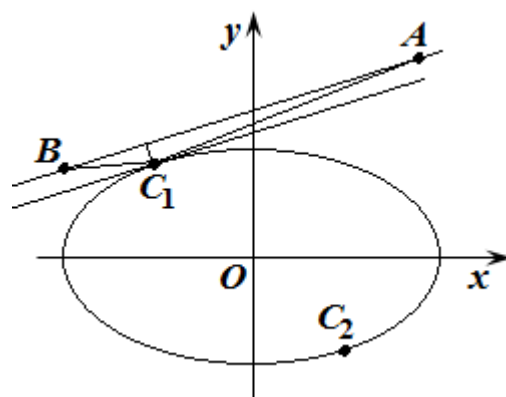


Рис. 47

паралельної прямій AB . Дотична до еліпса $\frac{xx_0}{5} + \frac{yy_0}{5/4} = 1$ має кутовий коефіцієнт $k = -\frac{x_0}{4y_0}$. Згідно умові паралельності прямих, запишемо:

$$k = k_{AB} \Rightarrow -\frac{x_0}{4y_0} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_0 = -x_0.$$

Тоді координати точки $C(x_0; y_0)$ задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = -x_0, \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow y_0^2 = 1, \quad y_0 = \pm 1, \quad x_0 = \mp 1.$$

Отримали точки $C_1(-1; 1)$ і $C_2(1; -1)$. Найближчою до прямої AB є точка $C_1(-1; 1)$.

Висота трикутника $\triangle ABC$ з мінімальною площею дорівнює відстані від точки C_1 до прямої AB : $h = \frac{|1 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{1+16}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$

Довжина сторони AB : $|AB| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$, отже, отримуємо

$$(S_{\triangle ABC})_{\min} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \sqrt{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $S = 0,5$.

3.2.54. 1). Нехай координати шуканої точки $M(x; y)$. Відстань від точки M до прямої $4x + 3y + 5 = 0$ дорівнює $d = \frac{|4x + 3y + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = 0,8$. Враховуючи, що точка

належить параболі $y = x^2$, маємо:

$$\frac{|4x + 3x^2 + 5|}{5} = 0,8 \quad \text{або} \quad 3x^2 + 4x + 5 = \pm 4.$$

Розглянемо два випадки:

а) $3x^2 + 4x + 5 = -4 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 9 = 0$, $D = -92 < 0$, $x \in \emptyset$;

б) $3x^2 + 4x + 5 = 4 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$, $D = 4 > 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{9}$.

Отже, на заданій параболі на відстані 0,8 від прямої $4x + 3y + 5 = 0$ розташовано дві точки $M_1(-1; 1)$ і $M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$.

2). Знайдемо найкоротшу відстань від прямої $4x + 3y + 5 = 0$ до параболи $y = x^2$. Вона дорівнює відстані від прямої до точки $M_0(x_0; y_0)$ перетину параболи і дотичної до неї, яка паралельна прямій. В цьому випадку точка на параболі буде єдиною.

Дотична до параболи $xx_0 = \frac{1}{2}(y + y_0)$ має кутовий коефіцієнт $k = 2x_0$, який за умови паралельності дотичної і прямої дорівнює кутовому коефіцієнту прямої $k_1 = -\frac{4}{3}$. Система рівнянь для визначення координат точки дотику матиме вигляд:

$$\begin{cases} 2x_0 = -\frac{4}{3}, \\ y_0 = x_0^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{2}{3}, \\ y_0 = \frac{4}{9}. \end{cases} \Rightarrow M_0\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right).$$

Тоді відстань від заданої прямої до M_0 : $d = \frac{|4 \cdot (-2/3) + 3 \cdot 4/9 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{11}{15}$.

Відповідь: $M_1(-1; 1)$, $M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$; $\frac{11}{15}$.

3.2.55. Точка, що лежить на кривій $y = \frac{1}{x} + 1$, має координати $M\left(x; \frac{1}{x} + 1\right)$.

Квадрат відстані $S = |AM|^2 = x^2 + \left(\frac{1}{x} + 1 - 1\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Знайдемо похідну S' , а потім критичні точки функції:

$$S' = 2x - \frac{2}{x^3} = 2 \cdot \frac{x^4 - 1}{x^3} = 2 \cdot \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3};$$

$$S' = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3} = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0.$$

Область визначення функції розбиваємо на інтервали $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$ і на кожному з них визначаємо знак S' . При переході через точки $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ знак похідної S' змінюється з “-” на “+”, тобто вони є точками мінімуму. Відстань $|AM_1| = |AM_2| = \sqrt{2}$. Таким чином, найближчими до A є точки $M_1(1; 2)$ і $M_2(-1; 0)$.

Відповідь: $M_1(1; 2)$, $M_2(-1; 0)$.

3.2.56. Нехай $CB = a$ і $CA = b$ – катети $\triangle ABC$, $C(x_0; y_0)$ – вершина прямого кута (рис.48).

$$\text{Маємо } |MA| = \sqrt{b^2 - y_0^2},$$

$$|OA| = x_0 - |MA| = x_0 - \sqrt{b^2 - y_0^2};$$

$$|BN| = \sqrt{a^2 - x_0^2}, \quad |ON| = y_0,$$

$$|BO| = y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

Оскільки $|OB|^2 + |OA|^2 = |AB|^2 = a^2 + b^2$, то отримуємо:

$$\left(y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2}\right)^2 + \left(x_0 - \sqrt{b^2 - y_0^2}\right)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$y_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} = x_0 \sqrt{b^2 - y_0^2} \Rightarrow y^2 a^2 = x^2 b^2 \Rightarrow y = \pm bx / a.$$

Зауваження. Якщо вважати, що точка C рухається в 1-му квадранті ($x_0 > 0, y_0 > 0$), то $y = bx / a$.

Відповідь: $y = \pm bx / a$.

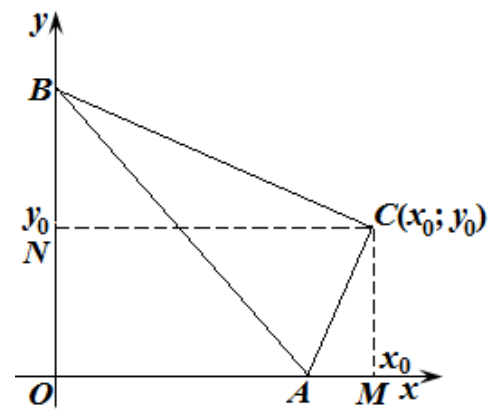


Рис. 48

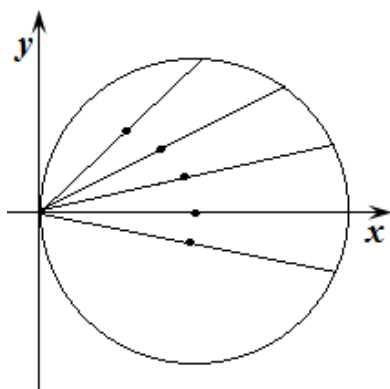


Рис. 49

Відповідь: $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

3.2.57. Нехай x_1, y_1 – координати точок, які лежать на колі $(x_1 - a)^2 + y_1^2 = a^2$. Тоді середини хорд мають координати $x = \frac{x_1}{2}, y = \frac{y_1}{2}$, так що $x_1 = 2x, y_1 = 2y$ (рис.49).

Підставивши x_1, y_1 в рівняння кола, отримаємо криву

$$(2x - a)^2 + 4y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = ax,$$

$$\text{або } \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

3.2.58. 1). Розглянемо хорду M_1M_2 , яка проходить через точку P . Нехай $M(x; y)$ – середина цієї хорди. Точка O лежить на серединному перпендикулярі до відрізка M_1M_2 . Тобто, точка M лежить на колі, побудованому на OP як на діаметрі.

Діаметр кола $|OP| = c$, радіус $R = \frac{c}{2}$, центр

кола – точка $O_1\left(\frac{c}{2}; 0\right)$ (рис.50).

Рівняння кола набуває вигляду

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2, \text{ або } x^2 + y^2 = xc. \text{ Це}$$

коло і є геометричним місцем середин хорд заданого круга.

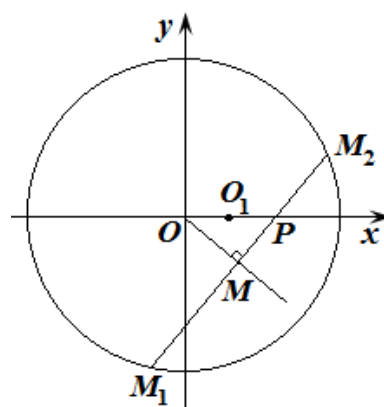


Рис. 50

2). Правий фокус гіперболи – точка $F_1(c; 0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}a$.

Рівняння множини хорд, що проходять через правий фокус гіперболи

$x^2 - y^2 = a^2$ має вигляд $y = k(x - \sqrt{2}a)$. Виразимо координати точок перетину хорд з гіперболою через k , розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = k(x - \sqrt{2}a), \\ x^2 - y^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{2\sqrt{2}ak^2}{1-k^2}x - \frac{a^2(1+2k^2)}{1-k^2} = 0.$$

В останньому рівнянні сума коренів $x_1 + x_2 = -\frac{2\sqrt{2}ak^2}{1-k^2}$. Півсума цих абсцис дає абсцису середини хорди $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, тобто $x = -\frac{\sqrt{2}ak^2}{1-k^2}$, а ордината середини хорди дорівнює $y = -\frac{\sqrt{2}ak}{1-k^2}$. Останні дві рівності являють собою параметричні рівняння шуканої множини точок.

Виключимо з цих рівностей k . Для цього достатньо в співвідношенні $x = -\frac{\sqrt{2}ak^2}{1-k^2}$ покласти $k = \frac{y}{\sqrt{2a-x}}$. Отримаємо $x^2 - \sqrt{2}ax - y^2 = 0$, або $\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$. Таким чином, шуканою множиною точок є рівнобічна гіпербола з півосями $\frac{a}{\sqrt{2}}$ і центром в точці $O_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

Відповідь: 1) $x^2 + y^2 = xc$; 2) $\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$.

3.2.59. Виберемо систему координат так, як показано на рис. 51. $ABCD$ – заданий квадрат. Нехай $M(0; y)$ і $N(x; 0)$ – довільні точки, що лежать на

відрізках OB і OC (половинах діагоналей

квадрата). Тоді $\begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq a. \end{cases}$ Отож, всі відрізки

MN лежать у першій чверті, середини цих відрізків мають координати $\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right)$.

Оскільки виконуються умови $\begin{cases} 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{a}{2}, \\ 0 \leq \frac{y}{2} \leq \frac{a}{2}, \end{cases}$

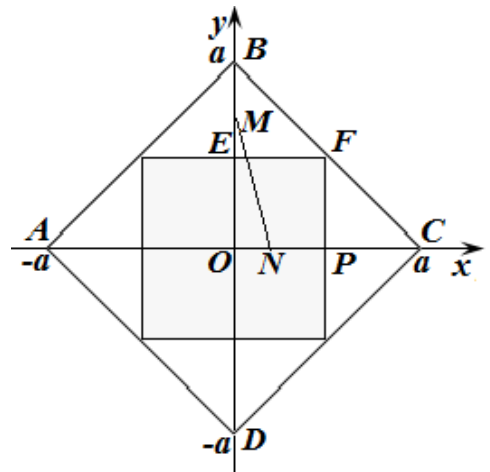


Рис. 51

то середини всіх можливих відрізків MN заповнюють квадрат $OEPF$.

Скориставшись симетрією квадрата, отримаємо, що шукана множина – квадрат з вершинами на серединах сторін заданого квадрата.

Відповідь: квадрат з вершинами на серединах сторін заданого квадрата $ABCD$.

3.2.60. Побудуємо прямокутну систему координат з центром в середині відрізка AB і віссю абсцис, направленою від точки A до точки B (рис.52).

Нехай $AB = d$, $M(x; y)$ – точка шуканої множини. Тоді

$$AM^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$BM^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2.$$

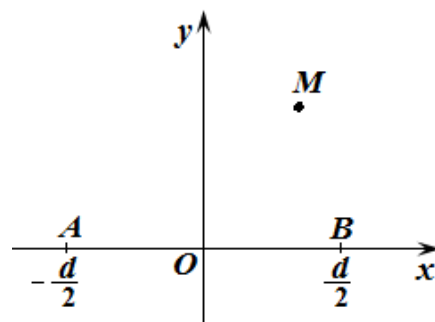


Рис. 52

Звідси знаходимо, що $AM^2 - BM^2 = 2xd$. За

умовою задачі $AM^2 - BM^2 = a$. Тоді шукана

множина точок задається

рівнянням $2xd = a$, звідки отримаємо рівняння прямої, паралельної осі Oy .

Відповідь: пряма $x = \frac{a}{2d}$. $x = \frac{a}{2d}$.

3.2.61. Виберемо прямокутну систему координат xOy так, щоб вісь Ox збігалася з прямою l , а центр кола K знаходився в точці $C_1(0; a)$ осі Oy (рис.53).

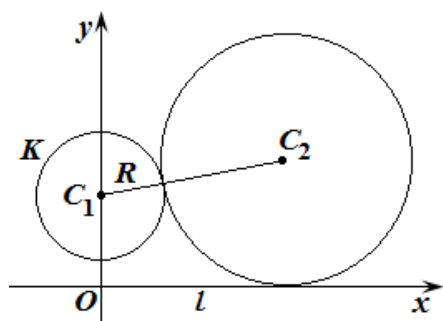


Рис. 53

Нехай $C_2(x; y)$ – центр кола, яке дотикається і до кола K , і до прямої l . Відстань від цієї точки до осі Ox (прямої l) дорівнює y , а відстань до кола K дорівнює $\sqrt{x^2 + (y - a)^2} - R$. Тому координати довільної точки шуканого геометричного місця точок (і тільки вони) задовольняють рівняння

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} - R = y,$$

тобто $x^2 + (y - a)^2 = (y + R)^2$, звідки після очевидних перетворень маємо:

$$(2a + 2R)y = x^2 + a^2 - R^2, \text{ або } y = \frac{x^2}{2(a + R)} + \frac{a - R}{2}.$$

Отже, шукане геометричне місце точок – парабола, яка відносно вибраної системи координат визначається отриманим рівнянням. Віссю цієї параболи є Oy , а вершина знаходиться в точці $\left(0; \frac{a - R}{2}\right)$.

Відповідь: $y = \frac{x^2}{2(a+R)} + \frac{a-R}{2}.$

3.2.62. Після очевидних перетворень знайдемо, що множина точок, координати

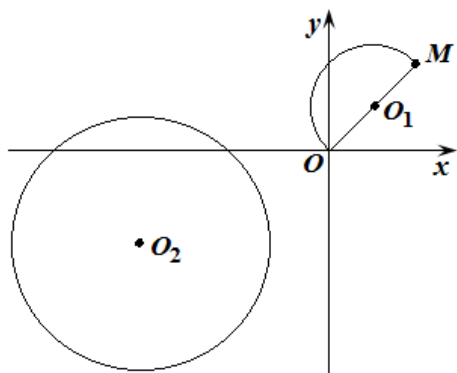


Рис. 54

яких задовольняють перше рівняння – це

півколо $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad y - x \geq 0$

з центром у точці $O_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ і радіусом

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Друге ж рівняння описує коло $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 2$ з центром в точці $O_2(-2; -1)$ і радіусом $R_2 = \sqrt{2}$ (рис.54).

Довжина відрізка, який з'єднує центри кіл: $O_1O_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$

Найменша відстань MN дорівнює:

$$d_1 = O_1O_2 - R_1 - R_2 = \frac{\sqrt{34}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{2}.$$

Найбільша відстань реалізується для крайньої точки $M(1; 1)$ півкола:

$$d_2 = MO_2 + R_2 = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-1)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{13} + \sqrt{2}.$$

Відповідь: $\sqrt{13} + \sqrt{2}; \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{2}.$

3.2.63. Розташуємо кола в системі координат xOy . Позначимо через α кут між віссю Ox і даним променем, а через $(x_C; y_C)$ – координати точки C (рис. 55).

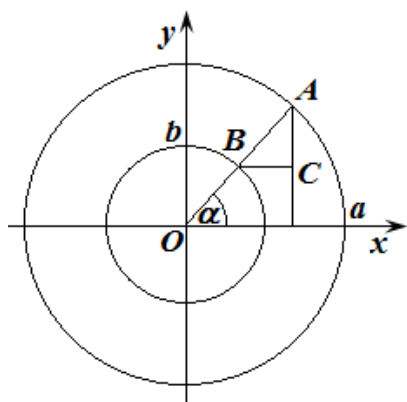


Рис.55

З умови випливають наступні рівності: $x_C = x_A,$

$$y_C = y_B, \quad \frac{x_A}{a} = \cos \alpha, \quad \frac{y_B}{b} = \sin \alpha \Rightarrow \frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_B^2}{b^2} = 1.$$

Звідки, враховуючи дві перші рівності, маємо

$$\frac{x_C^2}{a^2} + \frac{y_C^2}{b^2} = 1 \text{ – це рівняння еліпса. Отже, всі точки}$$

$$\text{утворюють еліпс } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2.64. Нехай коло з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$, яке проходить через точку $N(-x_0; -y_0)$ перетинає гіперболу в трьох точках $A(x_a; y_a)$, $B(x_b; y_b)$ і $C(x_c; y_c)$ (рис.56). Тоді координати цих точок задовольняють систему рівнянь

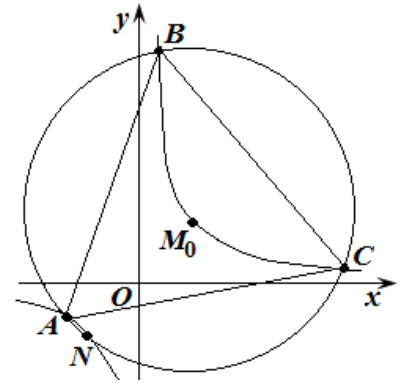


Рис. 56

$$\begin{cases} xy = 1, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2). \end{cases}$$

Виключаючи y з цієї системи, дістаємо рівняння:

$$(x - x_0)^2 + \left(\frac{1}{x} - y_0\right)^2 - 4(x_0^2 + y_0^2) = 0, \quad \text{або}$$

$x^4 - 2x_0x^3 + (x_0^2 + y_0^2 - 4(x_0^2 + y_0^2))x^2 - 2y_0x + 1 = 0$. За теоремою Вієта сума всіх коренів цього рівняння, включаючи корінь $-x_0$, дорівнює $2x_0$. Тому $x_a + x_b + x_c = 3x_0$. Аналогічно $y_a + y_b + y_c = 3y_0$.

Оскільки центр ваги трикутника ABC має координати

$$x_0 = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \quad y_0 = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}$$

і збігається з центром описаного кола, то трикутник правильний, бо тільки в правильному трикутнику центри вписаного і описаного кіл, центр ваги і ортоцентр збігаються, що і треба було довести.

3.2.65. Позначимо через $A(x_1; x_1^2)$ і $B(x_2; x_2^2)$ кінці відрізка, а через $M(x; y)$ – його середину. Координати точки M : $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$. Кутовий коефіцієнт AB $k = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$, тоді $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{2}$. Для того, щоб подати координату y через кутовий коефіцієнт k , скористаємось умовою $|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 1$. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = k^2, \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = k^2, \\ (x_2 - x_1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = k^2, \\ (x_2 - x_1)^2(1 + (x_2 + x_1)^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = k^2, \\ (x_2 - x_1)^2 = 1 / (1 + k^2) \end{cases}$$

Додавши перше рівняння до другого, знайдемо: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{k^4 + k^2 + 1}{2(1 + k^2)}$.

Тоді $y = \frac{k^4 + k^2 + 1}{4(1 + k^2)}$. Вилучивши k з параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = k/2, \\ y = \frac{k^4 + k^2 + 1}{4(1 + k^2)}, \end{cases}$$

отримаємо рівняння траєкторії точки $M(x; y)$: $y = \frac{16x^4 + 4x^2 + 1}{4(1 + 4x^2)}$.

Відповідь: $y = \frac{16x^4 + 4x^2 + 1}{4(1 + 4x^2)}$.

3.2.66. Запишемо задане рівняння у вигляді:

$$y = \left(x - \frac{2m}{m^2 + 1} \right)^2 + \frac{m^4 + 1}{(m^2 + 1)^2},$$

звідки отримаємо параметричні координати вершин

$$x = \frac{2m}{m^2 + 1}, \quad y = \frac{m^4 + 1}{(m^2 + 1)^2}.$$

Щоб виключити параметр m , із першого рівняння знаходимо $\frac{m}{m^2 + 1} = \frac{x}{2}$.

Тоді $2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y = \frac{2m^2 + m^4 + 1}{(m^2 + 1)^2} = 1$. Отже, геометричним місцем точок, які є

вершинами заданих парабол, є парабола $y = 1 - x^2/2$.

Відповідь: парабола $y = 1 - x^2/2$.

2.67. 1) Скориставшись формулами переходу до прямокутних координат, маємо

$$\sqrt{x^2 + y^2} \left(5 + \frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 9 \Rightarrow 5\sqrt{x^2 + y^2} = 9 - 4x \Rightarrow 9x^2 + 72x + 25y^2 - 81 = 0.$$

Виділимо повні квадрати змінних:

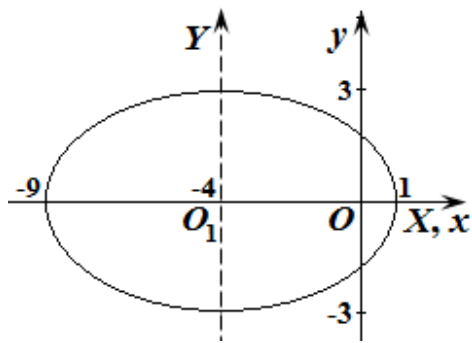


Рис. 57

Змінюючи x, y на X, Y за формулами $X = x + 4$, $Y = y$, що відповідають паралельному зсуву вздовж координатних осей, дістанемо рівняння $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$. Отримане рівняння є канонічним рівнянням еліпса з центром в точці $O_1(-4; 0)$ і півосями $a = 5$, $b = 3$ (рис. 57).

2) Застосувавши формули переходу до прямокутних координат і виділивши повні квадрати змінних, одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} \left(4 - \frac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= 9 \Rightarrow 4\sqrt{x^2 + y^2} = 9 + 5x \Rightarrow \\ \Rightarrow 9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 &= 0 \Rightarrow 9(x^2 + 10x + 25) - 16y^2 - 144 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9(x + 5)^2 - 16y^2 &= 144. \\ \frac{(x + 5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} &= 1. \Rightarrow \frac{(x + 5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1. \end{aligned}$$

Після заміни змінних $X = x + 5$, $Y = y$ запишемо рівняння гіперболи в новій системі координат XO_1Y , початок якої знаходиться у точці $O_1(-5; 0)$ і співпадає з центром гіперболи $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$. Півосі гіперболи $a = 4$, $b = 3$ (рис. 58).

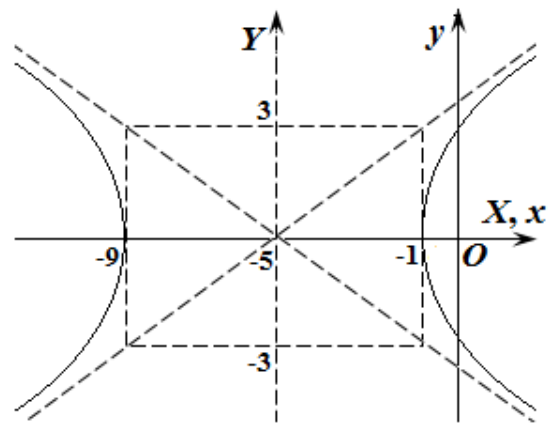


Рис. 58

Відповідь: 1) $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

3.2.68. Оскільки рівняння еліпса $x^2 + y^2 + xy = 9$ не змінюється при заміні y на x і x на y , то він симетричний відносно прямої $y = x$. Друга вісь симетрії $y = -x$ (рівняння не змінюється при заміні x на $-y$ і y на $-x$). Тоді центр еліпса $O(0; 0)$ – точка перетину осей симетрії (рис. 59). Площа $S_{\triangle ABC} = S_{\max}$, якщо висота $h = |CD|$ буде максимальною, оскільки основа $|AB| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ – число.

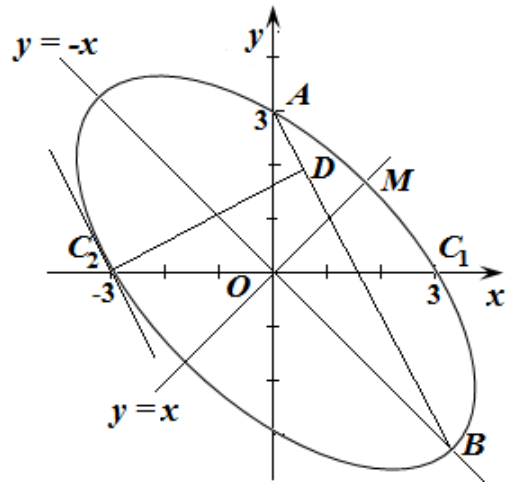


Рис.59

$$S = \frac{1}{2} |CD| |AB| = \frac{1}{2} h \cdot 3\sqrt{5}.$$

Величина h набуває максимального значення, якщо дотична в точці C буде паралельна хорді (AB) . Рівняння (AB) : $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{-6}$ або $y = 3 - 2x$, тому рівняння дотичної можна записати у вигляді $y = m - 2x$.

Підберемо m так, щоб ця пряма мала з еліпсом тільки одну спільну точку. Отримаємо

$$9 = x^2 + y(x + y) = x^2 + (m - 2x)(x + m - 2x) \Rightarrow 3x^2 - 3mx + m^2 - 9 = 0.$$

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння і прирівняємо його до нуля:

$$D = 9m^2 - 12(m^2 - 9) = 0 \Rightarrow m^2 = 36, \quad m = \pm 6.$$

При $m = 6$ маємо $x_1 = 3$, $y_1 = 6 - 2x_1 = 0$; якщо $m = -6$, то $x_2 = -3$, $y_2 = 0$. Отримали дві точки $C_1(3; 0)$ і $C_2(-3; 0)$. Найбільш віддаленою від $[AB]$ буде точка C_2 .

$$\text{Тоді } h_{\max} = |C_2D| = \frac{|3 - 2x_2 - y_2|}{\sqrt{5}} = 9\sqrt{5}, \quad S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 13,5.$$

Оскільки $B(3; -2)$ – одна з вершин еліпса, для визначення ексцентриситету ε знайдемо півосі еліпса $a = |OB|$ і $b = |OM|$. Оскільки $B(3; -2)$ – одна з вершин еліпса, то $|OB| = a = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$. Координати вершини M (точка перетину еліпса з віссю симетрії $y = x$) знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9, \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 3x^2 = 9, \quad x^2 = 3, \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Отже, $M(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $b = |OM| = \sqrt{6}$. Маємо $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Відповідь: $S_{\max} = 13,5$; $\varepsilon = \sqrt{5/6}$.

3.2.69. Одна з осей еліпса співпадає з діаметром круга, тобто піввісь $a = r$. Друга піввісь, яка утворює з віссю циліндра кут φ , дорівнює

$$b = \frac{r}{\cos(\pi/2 - \varphi)} = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad (b > a).$$

Тоді фокусна відстань $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\frac{r^2}{\sin^2 \varphi} - r^2} = r \operatorname{ctg} \varphi$, а ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{r \operatorname{ctg} \varphi}{r / \sin \varphi} = \cos \varphi.$$

Відповідь: $\cos \varphi$.

3.2.70. Позначимо через r радіус круга, що проходить через точку перетину площини з віссю конуса паралельно основі. Тоді одна з півосей $a = r$.

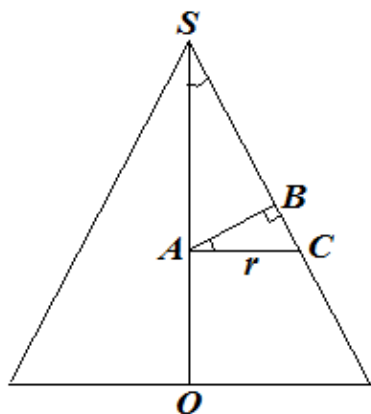


Рис.60

В прямокутному трикутнику $\triangle ABC$ (рис. 60) $AB = b = r \cos 30^\circ = r\sqrt{3}/2$.

Відстань від центра еліпса до фокуса $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{r^2 - 3r^2/4} = r/2$.

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

3.2.71. Знайдемо рівняння еліпса, використовуючи визначення еліпса. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка еліпса, тоді $|MF_1| + |MF_2| = 2a$; за умови: $F_1(2; 0)$, $F_2(0; 2)$, $2a = 4$ маємо $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 4$. Позбавляючись радикалів, знаходимо $(x-2)^2 + y^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + x^2 + (y-2)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4 + x - y = 2\sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 8(x + y) + 2xy = 0.$$

Можна отримати рівняння еліпса, використовуючи формули перетворення координат “поворот” і “паралельне перенесення”.

Відповідь: $3(x^2 + y^2) - 8(x + y) + 2xy = 0$.

3.2.72. Оскільки парабола з вершиною в початку координат проходить через точки $M_1(0;1)$ і $M_2(1;0)$, то пряма $y=x$ є віссю її симетрії (рис. 61).

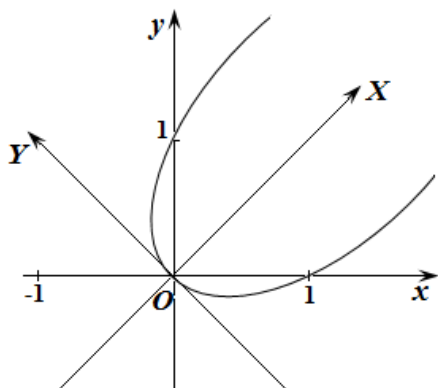


Рис.61

Введемо нову систему координат XOY , яка отримана шляхом повороту старої системи xOy навколо точки O на кут 45° .

В новій системі рівняння параболи матиме вигляд $Y^2 = 2pX$.

Для визначення параметра p знайдемо координати точки M_1 в новій

системі координат, скориставшись формулами повороту осей координат:

$$\begin{cases} 0 = X \cos 45^\circ - Y \sin 45^\circ, \\ 1 = X \sin 45^\circ + Y \cos 45^\circ \end{cases}$$

$$\text{або } \begin{cases} 0 = X \frac{1}{\sqrt{2}} - Y \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 1 = X \frac{1}{\sqrt{2}} + Y \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Y, \\ 1 = \frac{2X}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad X = Y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{Тоді } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad Y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X.$$

За допомогою зворотного переходу

$$\begin{cases} X = x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ, \\ Y = -x \sin 45^\circ + y \cos 45^\circ \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} X = x \frac{1}{\sqrt{2}} + y \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ Y = -x \frac{1}{\sqrt{2}} + y \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

отримаємо рівняння параболи в початковій системі координат xOy :

$$\left(-x \frac{1}{\sqrt{2}} + y \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x \frac{1}{\sqrt{2}} + y \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy = \frac{1}{2}(x + y),$$

$$\text{або } x^2 + y^2 - 2xy - x - y = 0.$$

Відповідь: $x^2 + y^2 - 2xy - x - y = 0$.

3.2.73. Нехай $M_0(x_0; y_0)$ – точка, в якій еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ і парабола $y^2 = 2px$ перетинаються під найбільшим кутом. Знайдемо похідні від функцій, що задають криві $\frac{2yy'}{b^2} + \frac{2x}{a^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$ і $2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}$. Кутові коефіцієнти дотичних в точці M_0 відповідно до еліпса і параболи: $k_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$ і $k_2 = \frac{p}{y_0}$.

Найбільший кут між ними буде 90° при $k_1 \cdot k_2 = -1$, тобто

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0 p}{y_0^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0 p}{2px_0} = -\frac{b^2}{2a^2} = -1$$

Звідси маємо $b^2 = 2a^2$, $b = \sqrt{2}a$.

Відповідь: $b = \sqrt{2}a$.

3.2.74. Нехай p і q – абсциси точок P і Q відповідно. Оскільки $y' = 3x^2$, то $y'(p) = 3p^2$ і $y'(q) = 3q^2$, а $\frac{y'(q)}{y'(p)} = \frac{q^2}{p^2}$. Рівняння дотичної до Γ в точці P має вигляд $y - p^3 = 3p^2(x - p)$. Оскільки точка $Q(q; q^3)$ належить і кривій Γ , і дотичній до цієї кривої в точці P , то $q^3 - p^3 = 3p^2(q - p)$, $q^2 + pq + p^2 = 3p^2$, $q^2 + pq - 2p^2 = 0$, $\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{q}{p} - 2 = 0$. Отже, $\frac{q}{p} = 1$ або $\frac{q}{p} = -2$. Оскільки $p \neq q$, то $\frac{q^2}{p^2} = 4$, що й треба було довести.

2.75. Рівняння дотичної до графіка функції шукаємо у вигляді $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. За умовою $f(x) = \frac{a^2}{x}$, тоді $f'(x) = -\frac{a^2}{x^2}$ і рівняння дотичної запишеться: $y - \frac{a^2}{x_0} = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0)$, або $\frac{a^2 x}{x_0^2} + y - \frac{2a^2}{x_0} = 0$.

Оскільки дотична перетинає осі координат у точках $(2x_0; 0)$ і $\left(0; \frac{2a^2}{x_0}\right)$,

то площа трикутника, утвореного дотичною до графіка функції $y = \frac{a^2}{x}$ з осями

координат, дорівнює $S = \frac{1}{2} \cdot 2|x_0| \cdot \frac{2a^2}{|x_0|} = 2a^2$. Це означає, що площа трикутника не залежить від координат точки дотику і є сталою величиною, що й треба було довести.

3.2.76. Позначимо через $M(x; x^2)$ довільну точку параболи. Тоді $AM = \sqrt{x^2 + (x^2 - 9/2)^2}$. Шукана відстань – найменша з відстаней AM .

Для спрощення обчислень доцільно шукати найменше значення функції

$$f(x) = x^2 + \left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2 = x^4 - 8x^2 + \frac{81}{4}, \quad x \in R.$$

Оскільки $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$, то найменшого значення функція $f(x)$ досягає в точках $x = 2$ та $x = -2$ (рис. 62) і дорівнює $f(\pm 2) = 16 - 32 + \frac{81}{4} = \frac{17}{4}$. Отже, відстань від точки $A\left(0; \frac{9}{2}\right)$ дорівнює $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

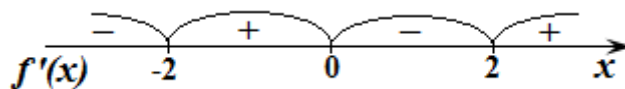


Рис.62

Відповідь: $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

3.2.77. Нехай $x_0 > 0$ – абсциса точки дотику першої дотичної. З умови задачі випливає, що абсциса другої точки дотику буде $-x_0$. Рівняння дотичної, що проведена до кривої $y = y(x)$ в точці $(x_0; y_0)$, має вигляд $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$. Тоді рівняння дотичних будуть відповідно такі:

$$y = -\frac{x}{x_0^2} + \frac{2}{x_0} \quad \text{і} \quad y = -\frac{x}{x_0^2} - \frac{2}{x_0}.$$

Скористаємося формулами відстані від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ на площині $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Нехай $M\left(x_0; \frac{1}{x_0}\right)$ – точка дотику до графіка функції $y = \frac{1}{x}$, яка лежить на дотичній $y + \frac{x}{x_0^2} - \frac{2}{x_0} = 0$, а пряма – друга дотична $y + \frac{x}{x_0^2} + \frac{2}{x_0} = 0$. Тоді, враховуючи умову задачі, отримаємо

$$\frac{\left|\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0} + \frac{2}{x_0}\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x_0^2}\right)^2}} = 1, \quad \frac{4x_0^2}{x_0\sqrt{1 + x_0^4}} = 1, \quad x_0^4 - 16x_0^2 + 1 = 0, \quad x_0^2 = 8 \pm \sqrt{63},$$

звідки отримаємо $(x_0)_1 = \sqrt{8 + \sqrt{63}}$, $(x_0)_2 = \sqrt{8 - \sqrt{63}}$.

Відповідь: $y + \frac{x}{x_0^2} - \frac{2}{x_0} = 0$; $y + \frac{x}{x_0^2} + \frac{2}{x_0} = 0$; $x_0 = \sqrt{8 \pm \sqrt{63}}$.

3.2.78. Оскільки $(x^7 + 7x + 1)' = 7x^6 + 7 > 0$, то многочлен непарного степеня в чисельнику строго зростає і має єдиний корінь x_0 . Якщо α – кут, під яким крива перетинає вісь Ox в точці $(x_0; 0)$ і з урахуванням того, що в цьому випадку $x_0^7 + 7x_0 + 1 = 0$, маємо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(7x_0^6 + 7)^2 - (x_0^7 + 7x_0 + 1) \cdot 42x_0}{(7x_0^6 + 7)^2} = 1$. Тоді кут $\alpha = 45^\circ$.

Відповідь: 45° .

3.2.79. Рівняння дотичної шукаємо у вигляді $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, або $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. Для визначення $f(1)$ підставимо $x = x_0 = 1$ в задану рівність: $f(1) - 4f(1) = -9$, звідки $f(1) = 3$. Значення $f'(1)$ знайдемо після диференціювання заданої рівності з урахуванням парності функції і непарності похідної:

$(6x^2 - 1)f'(2x^3 - x) - 8x \cdot f(x^2 - x - 1) - 4x^2(2x - 1)f'(x^2 - x - 1) = 40x^4 - 24x^2 - 22x$,
або $5f'(1) - 8f(-1) - 4f'(-1) = -6$, $9f'(1) = -6 + 8f(-1)$, $9f'(1) = 18$, $f'(1) = 2$.
Таким чином рівняння дотичної: $y = 3 + 2(x - 1)$.

Відповідь: $y = 3 + 2(x - 1)$.

3.3. Задачі про дотичні

3.3.1. Рівняння дотичної l , що проведена до параболи в точці $(x_0; y_0)$ має вигляд $4ax + 2yy_0 - y_0^2 = 0$. Рівняння перпендикуляра l_1 до l , опущеного з вершини $O(0; 0)$, запишеться у вигляді $y_0x - 2ay = 0$. Координати $(x; y)$ точки перетину l і l_1 знайдемо з системи рівнянь, виключивши x_0 та y_0 :

$$\begin{cases} 4ax + 2yy_0 - y_0^2 = 0, \\ y_0x - 2ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4ax + 2yy_0 - y_0^2 = 0, \\ y_0 = \frac{2ay}{x} \end{cases} \Rightarrow xy^2 + x^3 - ay^2 = 0.$$

Відповідь: $xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$.

3.3.2. Скористаємося умовами дотику еліпса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ і прямої $Ax + By + C = 0$, а також параболи $y^2 = 2px$ і прямої $y = kx + b_1$, де $k = -\frac{A}{B}$, $b_1 = -\frac{C}{B}$, які мають вигляд $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$ і $p = 2kb_1$ відповідно.

З канонічного рівняння еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ знайдемо $a^2 = 45$, $b^2 = 20$.

З рівняння параболи $y^2 = \frac{20}{3}x$ отримаємо $2p = \frac{20}{3}$, $p = \frac{10}{3}$.

Для спільної дотичної маємо систему рівнянь, з якої знайдемо A , B , і C :

$$\begin{cases} 45A^2 + 20B^2 = C^2, \\ \frac{10}{3} = 2\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{C}{B}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 45\left(\frac{A}{B}\right)^2 + 20 = \left(\frac{C}{B}\right)^2, \\ 1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{B}. \end{cases}$$

Нехай $t = \frac{C}{B}$, тоді $\frac{A}{B} = \frac{5}{3t}$ і система зводиться до рівняння $45 \cdot \frac{25}{9t^2} + 20 = t^2$
 $\Rightarrow t^4 - 20t^2 - 125 = 0$, $z = t^2$ ($z > 0$), $z^2 - 20z - 125 = 0$, $z_1 = 25$, $z_2 = -5 < 0$ – не підходить, $t^2 = 25$, $t = \pm 5$. Отже, маємо дві спільні дотичні $y = -\frac{1}{3}x - 5$ і $y = \frac{1}{3}x + 5$, або $x \pm 3y + 15 = 0$.

Відповідь: $x \pm 3y + 15 = 0$.

3.3.3. 1) Розглянемо параболу $y^2 = 8x$ і дотичні до неї, які відтинають на осях рівні відрізки (рис. 63). Рівняння першої дотичної (l_1), що проходить через точки $M_1(-a; 0)$ і $M_2(0; a)$, має вигляд $y = x + a$, $a > 0$.

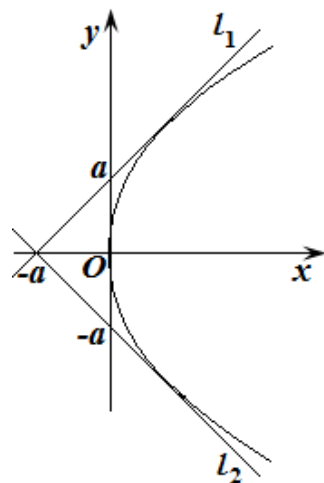


Рис.63

Друга дотична (l_2) розташована симетрично відносно осі Ox і має рівняння $y = -x - a$. Для визначення невідомої a розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = 8x, \\ y = x + a. \end{cases}$$

У разі дотику прямої і параболі дискримінант квадратного рівняння, $x^2 + (2a - 8)x + a^2 = 0$, до якого зводиться ця система, дорівнює нулю:

$$D = -32a + 64 = 0, \quad a = 2.$$

Тоді рівняння дотичних: $y = x + 2$ (l_1) і $y = -x - 2$ (l_2), або $x \pm y + 2 = 0$.

2) Якщо дотична $y = k_1x + b_1$ перпендикулярна прямій $y = 3x + 2$, то її кутовий коефіцієнт $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{3}$. Відомо, що пряма $y = k_1x + b_1$ дотикається до параболі $y^2 = 2px$ за умови $p = 2k_1b_1$, звідки отримуємо $b_1 = \frac{p}{2k_1} = \frac{4 \cdot (-3)}{2} = -6$.

Отже, рівняння дотичної матиме вигляд $y = -\frac{1}{3}x - 6$, або $x + 3y + 18 = 0$.

Відповідь: 1) $x \pm y + 2 = 0$; **2)** $x + 3y + 18 = 0$.

3.3.4. 1) З'ясуємо взаємне розташування гіперболи і прямої. Для цього

розглянемо систему рівнянь:
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \\ y = kx + m. \end{cases}$$

Після виключення невідомого y прирівняємо до нуля дискримінант отриманого квадратного рівняння:

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} \right) - \frac{2km}{b^2} x - \left(\frac{m^2}{b^2} + 1 \right) = 0, \quad D = 4 \frac{b^2 + m^2 - a^2 k^2}{a^2 b^2} = 0.$$

Отже, $a^2k^2 = b^2 + m^2$ – необхідна і достатня умова того, що пряма $y = kx + m$ дотикається до гіперболи $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$;

2) Аналогічно можна отримати необхідну і достатню умову дотику прямої $y = kx + m$ до гіперболи $xy = p$:

$$\begin{cases} xy = p, \\ y = kx + m. \end{cases} \Rightarrow kx^2 + mx - p = 0, \quad D = 0 \Rightarrow m^2 + 4kp = 0.$$

Відповідь: 1) $a^2k^2 = b^2 + m^2$; 2) $m^2 + 4kp = 0$.

3.3.5. Скористаємося умовою дотику прямої $y = kx + m$ і гіперболи $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, отриманою в 3.4: $a^2k^2 = b^2 + m^2$. Значення параметрів a^2 і

b^2 знайдемо з канонічного рівняння гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 = 16$.

За умовою задачі дотична проходить через точку $A(-1; -7)$, тож маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 16k^2 = 16 + m^2, \\ -7 = -k + m \end{cases} \Rightarrow 16k^2 = 16 + (k - 7)^2 \Rightarrow 15k^2 + 14k - 65 = 0, \text{ звідки}$$

маємо $k_1 = \frac{5}{3}$, $k_2 = -\frac{13}{5}$. Тоді $m_1 = -\frac{16}{3}$, $m_2 = -\frac{48}{5}$.

Рівняння першої дотичної $y = \frac{5}{3}x - \frac{16}{3}$

, або $5x - 3y - 16 = 0$. Точка дотику – $M_1(5; 3)$. Рівняння другої дотичної

$y = -\frac{13}{5}x - \frac{48}{5}$, або $13x + 5y + 48 = 0$. В цьому

випадку точка дотику – $M_2\left(-\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right)$ (рис.

64).

Відповідь: $5x - 3y - 16 = 0$;

$$13x + 5y + 48 = 0$$

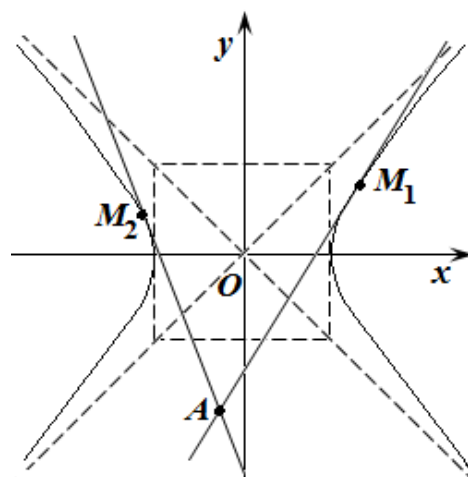


Рис.64

3.3.6. Якщо дотична до гіперболи $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ паралельна прямій, то її рівняння можна записати у вигляді $y = kx + m$. З'ясуємо за якої умови пряма дотикається до гіперболи. Для цього розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \\ y = kx + m. \end{cases}$$

Після виключення невідомого y прирівняємо до нуля дискримінант отриманого рівняння $x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} \right) - \frac{2km}{b^2} x - \left(\frac{m^2}{b^2} + 1 \right) = 0$, $D = 4 \frac{b^2 + m^2 - a^2 k^2}{a^2 b^2} = 0$. Отже, $a^2 k^2 = b^2 + m^2$, звідки маємо $k^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{m^2}{a^2}$, а це означає, що $k^2 > \frac{b^2}{a^2}$, тобто кутовий коефіцієнт дотичних за модулем має бути більшим за кутовий коефіцієнт асимптот гіперболи, тобто $|k| > \frac{b}{a}$.

Відповідь: $|k| > \frac{b}{a}$.

3.3.7. Маємо канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, його півосі $a = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $b = 3$,

тобто еліпс витягнутий уздовж осі Oy (рис. 65). З умови випливає, що парабола буде симетрична відносно осі Oy , її вітки будуть направлені вгору.

Рівняння параболи будемо шукати у вигляді

$y = kx^2 - c$. В точках A і B парабола та еліпс матимуть спільні дотичні. Для точки B з рівняння параболи знайдемо $y' = 2kx|_{x=1} = 2k$.

Продиференціюємо рівняння еліпса $8x^2 + y^2 = 9$ за змінною x :

$$16x + 2y \cdot y' = 0, \text{ звідки } y' = -\frac{8x}{y}|_{(1;-1)} = 8.$$

Тоді $k = 4$ і рівняння параболи набуває вигляду $y = 4x^2 - c$. Підставивши в це рівняння координати точки B , одержимо $-1 = 4 - c$, $c = 5$. Отже, шукане рівняння параболи $y = 4x^2 - 5$.

Відповідь: $y = 4x^2 - 5$.

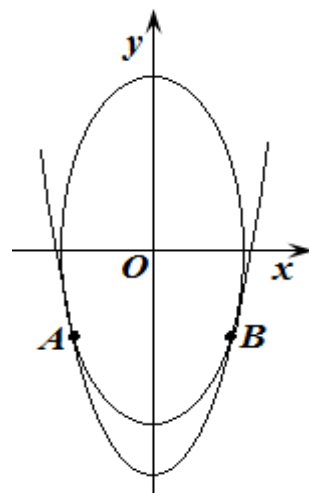


Рис.65

3.3.8. Рівняння параболи шукаємо у вигляді $x^2 = -2py$ ($p > 0$) (рис. 66).

Для визначення параметра p скористаємося тим, що пряма $y = 2 + x$ є дотичною до кривої. В цьому випадку

система рівнянь
$$\begin{cases} x^2 = -2py, \\ y = 2 + x \end{cases}$$

зводиться до рівняння

$$x^2 + 2px + 4p = 0,$$

яке має рівний нулю дискримінант

$$D = 4p^2 - 16p = 0 \quad \text{при} \quad p = 4. \quad \text{Тобто,}$$

рівняння параболи $x^2 = -8y$.

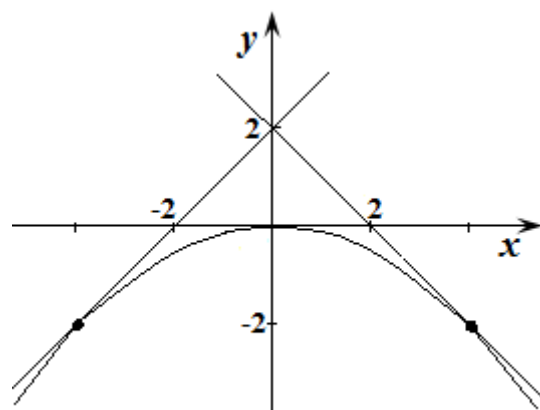


Рис. 66

Відповідь: $x^2 = -8y$.

3.3.9. Оскільки парабола проходить через точку $A(-1; 0)$, то $1 - p + q = 0$, звідки $q = p - 1$. Нехай $M(x_0; y_0)$ – точка дотику параболи і прямої $y = x$, тоді маємо $y'(x_0) = 2x_0 + p = 1$, звідки $x_0 = \frac{1-p}{2}$.

За умовою задачі $y_0 = x_0$, тож, враховуючи, що $x_0 = \frac{1-p}{2}$, $q = p - 1$, отримаємо

$$\frac{(1-p)^2}{4} - \frac{(1-p)^2}{2} + p - 1 = 0 \Rightarrow (1-p)(p-5) = 0 \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = 5.$$

Тоді $q_1 = 0$, $q_2 = 4$, а рівняння парабол, які задовольняють умови задачі, будуть такими: $y = x^2 + x$, $y = x^2 + 5x + 4$. Абсциси точок дотику цих парабол до прямої $y = x$ будуть $(x_0)_1 = 0$, $(x_0)_2 = -2$.

Відповідь: $p = 1$, $q = 0$; $p = 5$, $q = 4$.

3.3.10. Складемо рівняння дотичної до заданої кривої в точці $M(x_0; y_0)$, яка проходить через точку $A(2; -5)$:

$$k = y'(x_0) = 2x_0 - 4, \quad y_{\text{dom}} = (2x_0 - 4)(x - 2) - 5.$$

Оскільки точка $M(x_0; y_0)$ належить і кривій $y(x)$, і дотичній $y_{\text{dom}}(x)$, то

$$y_{\text{dom}}(x_0) = (2x_0 - 4)(x_0 - 2) - 5 = x_0^2 - 8x_0 + 3, \quad \text{а} \quad y(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3.$$

Прирівнюючи праві частини цих співвідношень, знаходимо

$$x_0^2 - 4x_0 = 0, \quad \text{звідки} \quad (x_0)_1 = 0, \quad (x_0)_2 = 4.$$

Отже, отримаємо дві точки дотику $M_1(0; 3)$ і $M_2(4; 3)$, у яких дотичні мають кутові коефіцієнти $k_1 = -4$ та $k_2 = 4$ і рівняння $y = -4x + 3$ та $y = 4x - 13$ відповідно.

Відповідь: $y = -4x + 3$; $y = 4x - 13$.

3.3.11. Рівняння дотичної до заданої параболі в точці $(c; c^2 + ac + b)$ матиме вигляд

$$y = f'(c)(x - c) + c^2 + ac + b,$$

причому $f'(x) = 2x + a$, отже, $f'(c) = 2c + a$. Таким чином, рівняння дотичної набуває вигляду

$$y = (a + 2c)x + b - c^2.$$

Коли дотичною є пряма $y = -x$, то отримуємо

$$\begin{cases} a + 2c = -1, \\ b - c^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{a+1}{2}, \\ c^2 = b \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = b \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 4b.$$

У другому випадку дотична – це пряма $y = 5x - 6$, тому одержимо

$$\begin{cases} a + 2c = 5, \\ b - c^2 = -6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{5-a}{2}, \\ c^2 = b + 6 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 = b + 6 \Rightarrow a^2 - 10a + 1 = 4b.$$

Таким чином, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a^2 + 2a + 1 = 4b, \\ a^2 - 10a + 1 = 4b. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, одержимо $a = 0$, $b = 1/4$.

Відповідь: $a = 0$, $b = 1/4$.

3.3.12. Застосуємо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Запишемо рівняння дотичних до першої та другої парабол у точках з абсцисами x_1 та x_2 відповідно:

$$y = (2x_1 + 4)(x - x_1) + x_1^2 + 4x_1 + 8 \quad \text{та} \quad y = (2x_2 + 8)(x - x_2) + x_2^2 + 8x_2 + 4.$$

Після перетворень матимемо

$$y = (2x_1 + 4)x - x_1^2 + 8 \quad \text{та} \quad y = (2x_2 + 8)x - x_2^2 + 4.$$

Одержані дотичні збігатимуться за умови
$$\begin{cases} 2x_1 + 4 = 2x_2 + 8, \\ -x_1^2 + 8 = -x_2^2 + 4. \end{cases}$$

Звідси маємо $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, а рівняння спільної дотичної буде $y = 8x + 4$.

Відповідь: $y = 8x + 4$.

3.3.13. Нехай хорда першої параболи дотикається до другої параболи в точці $(x_0; y_0)$, де $y_0 = x_0^2 + m$. Рівняння цієї дотичної має вигляд

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + m, \quad \text{або} \quad y = 2x_0x - x_0^2 + m.$$

Точки перетину дотичної з першою параболою (кінці хорди) визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} y = 2x_0x - x_0^2 + m, \\ y = x^2. \end{cases}$$

Виключивши з цієї системи y , дістанемо квадратне рівняння $x^2 - 2x_0x + x_0^2 - m = 0$, коренями якого є абсциси x_1 і x_2 кінців хорди першої параболи. Розв'язуючи квадратне рівняння, знаходимо

$$x_1 = x_0 - \sqrt{m}, \quad x_2 = x_0 + \sqrt{m} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

а це й означає, що хорда першої параболи в точці дотику до другої параболи поділяється навпіл, тобто у відношенні 1:1.

Відповідь: у відношенні 1:1.

3.3.14. Шукана парабола задається рівнянням вигляду $y = a(x + 1)^2 + b$, або $y = ax^2 + 2ax + a + b$, де $a < 0$. Нехай $(x_0; y_0)$ – точка дотику параболи і заданої прямої, тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = a(x_0 + 1)^2 + b, \\ 2a(x_0 + 1) = 6, \\ 6x_0 - y_0 + 3 = 0. \end{cases}$$

Із двох останніх рівнянь системи отримаємо $x_0 = \frac{3}{a} - 1$, $y_0 = 6x_0 + 3 = \frac{18}{a} - 3$, а з першого рівняння $b = y_0 - a(x_0 + 1)^2 = \frac{9}{a} - 3$.

Ордината точки перетину параболи $y = ax^2 + 2ax + a + b$ з віссю Oy дорівнює $a + b = a + \frac{9}{a} - 3$. Розглянемо функцію $f(a) = a + \frac{9}{a} - 3$, $a \neq 0$. Вона має похідну $f'(a) = 1 - \frac{9}{a^2} = \frac{a^2 - 9}{a^2}$, причому $f'(a) > 0$ при $a < -3$, $f'(a) < 0$ при $-3 < a < 0$.

Отже, найбільшого значення функція досягає при $a = -3$, при цьому ордината точки перетину параболи з віссю Oy буде $b = \frac{9}{a} - 3 = -6$. Отже, шукана парабола має рівняння $y = -3(x + 1)^2 - 6$.

Відповідь: $y = -3(x + 1)^2 - 6$.

3.3.15. З графічних міркувань очевидно, що точка M лежить у першій чверті. При цьому задані параболи дотикаються одна до однієї в точці $M(x_0; y_0)$, тобто мають спільну дотичну, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $2x_0$. З іншого боку, розглядаючи в другому рівнянні x як функцію від y , знайдемо $x'(y_0) = 2y_0$. Величина $2y_0$ – це тангенс кута нахилу зазначеної дотичної до осі Oy . Тоді тангенс кута її нахилу до осі Ox дорівнює $\frac{1}{2y_0}$. Маємо $2x_0 = \frac{1}{2y_0}$, тобто $x_0 y_0 = 1/4$. Отже, точка $M(x_0; y_0)$ лежить на правій вітці гіперболи $4xy = 1$.

Доведемо обернене твердження. Нехай $M(x_0; y_0)$ – довільна точка, для якої $x_0 y_0 = \frac{1}{4}$. Проведемо через неї дві параболи заданого вигляду:

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2 \text{ і } x = y^2 + x_0 - y_0^2.$$

Доведемо, що система цих рівнянь має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$. Те, що $(x_0; y_0)$ задовольняє обидва рівняння, очевидно. А єдиність цього розв'язку випливає з того, що обидві параболи мають у цій точці спільну дотичну і розташовані по різні боки від неї.

Відповідь: точка описує вітку гіперболи $4xy = 1$, розташовану в першій чверті.

3.4. Задачі з параметрами

3.4.1. Побудуємо фігуру, що складається з точок $(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність $2|x+y|+|x-2y+3|\leq 6$. При цьому прямі $y=-x$ (l_1) і $y=\frac{x+3}{2}$ (l_2) розбивають координатну площину xOy на чотири підобласті (рис. 67).

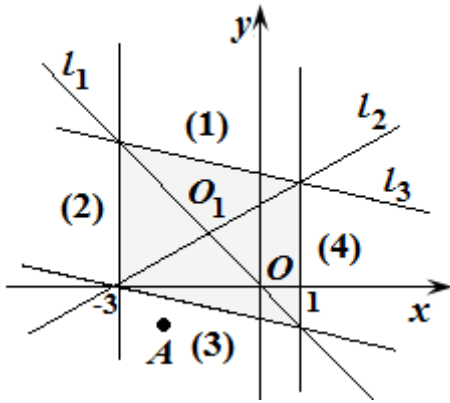


Рис. 67

В області (1) виконуються рівності $|x-2y+3|=-x+2y-3$ і $|x+y|=x+y$, отже, вихідна нерівність набуває вигляду $y \leq \frac{9-x}{4}$ (l_3). Першій області належить трикутник, обмежений прямими l_1 , l_2 і l_3 .

В області (2) виконуються рівності $|x+y|=-x-y$ і $|x-2y+3|=-x+2y-3$, тоді вихідна нерівність набуває вигляду $x \geq -3$. Тобто друга область являє собою трикутник, обмежений прямими l_1 , l_2 та $x=-3$.

В області (3) маємо: $|x+y|=-x-y$, $|x-2y+3|=x-2y+3$, вихідна нерівність набуває вигляду $y \geq \frac{-x-3}{4}$. Третій області належить трикутник, обмежений прямими l_1 , l_2 та прямою $y = \frac{-x-3}{4}$.

В області (4) вірні рівності $|x+y|=x+y$ та $|x-2y+3|=x-2y+3$, вихідна нерівність має вигляд $x \leq 1$. Четвертій області належить трикутник, обмежений прямими l_1 , l_2 та прямою $x=1$.

Таким чином, нерівність $2|x+y|+|x-2y+3|\leq 6$ задає на площині паралелограм, центр якого знаходиться в точці перетину прямих l_1 і l_2 .

Знайдемо її координати:
$$\begin{cases} y=-x, \\ y=\frac{x+3}{2} \end{cases} \Rightarrow O_1(-1; 1).$$

При будь-якому значенні параметра a пряма $y=a(x+2)-1$ проходить через точку $A(-2; -1)$. Для того, щоб ця пряма поділила периметр паралелограма навпіл, вона має пройти через центр паралелограма, який є також центром його симетрії, тобто через точку $O_1(-1; 1)$. Підставивши координати O_1 в рівняння прямої $y=a(x+2)-1$, знайдемо параметр $a=2$ і рівняння прямої $y=2x+3$.

Відповідь: $a=2$.

3.4.2. 1). Якщо $a = 0$, то прямі $y = -2$ і $y = 0$ не утворюють багатокутник.

2). Якщо $a > 0$, то прямі $y = a|x - 2| + a - 2$ і $y = \frac{a}{2}$ утворюють трикутник,

при цьому $\frac{a}{2} > a - 2$, $a \in (0; 4)$. Висота вказаного трикутника

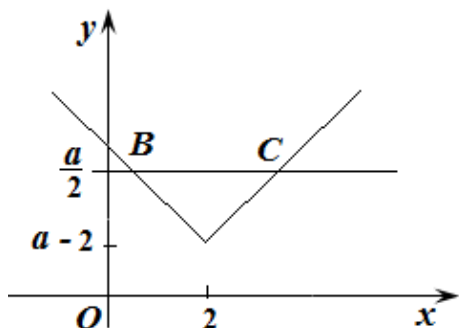


Рис. 68

$$h = \frac{a}{2} - (a - 2) = 2 - \frac{a}{2} \text{ (рис. 68).}$$

Знайдемо довжину основи BC як відстань між точками перетину прямих

$$y = a|x - 2| + a - 2 \quad \text{і} \quad y = \frac{a}{2}:$$

$$a|x - 2| + a - 2 = \frac{a}{2} \Rightarrow |x - 2| = \frac{2}{a} - \frac{1}{2},$$

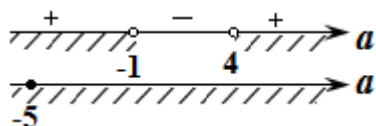
$$x = 2 \pm \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{2} \right), \quad x_1 = 1,5 + \frac{2}{a}, \quad x_2 = 2,5 - \frac{2}{a}.$$

3.4.3. З'ясуємо, при яких значеннях $a \in \mathbb{R}$ рівняння $x^2 - 2x + 2y + y^2 - a - 3 = 0$

зображує коло: $(x - 1)^2 - 1 + (y + 1)^2 - 1 - a - 3 = 0$, $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = a + 5$. Ліва частина рівняння невід'ємна, тоді й права частина $a + 5 \geq 0$.

Оскільки точка M_0 лежить поза кругом $x^2 - 2x + 2y + y^2 - a - 3 \leq 0$, то

$$|O_1 M_0| > R, \quad \sqrt{(a - 1)^2 + (-1 + 1)^2} > \sqrt{a + 5}, \quad a^2 - 3a - 4 > 0, \quad (a - 4)(a + 1) > 0.$$



$$a \in [-5; -1) \cup (4; \infty).$$

1). Нехай $a \in [-5; -1)$. В цьому випадку точка M_0 знаходиться зліва від кола (рис. 70).

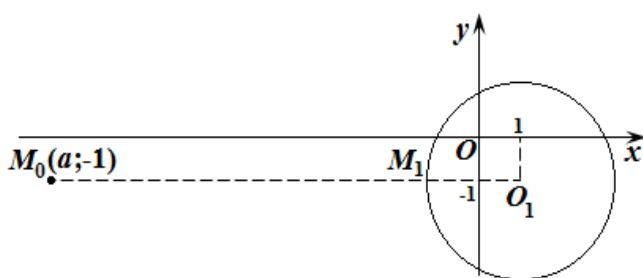


Рис. 70

Знайдемо на колі точку M_1 ,

відстань якої до M_0 дорівнює $4R$:

$$d_1 = |M_0 M_1| = -a - (\sqrt{a + 5} - 1) = 4\sqrt{a + 5}$$

$$\Rightarrow 1 - a = 5\sqrt{a + 5}, \quad a^2 - 27a - 124 = 0,$$

$$a_1 = -4, \quad a_2 = 31 - \text{не підходить.}$$

2). Якщо $a \in (4; \infty)$, точка M_0 знаходиться справа від кола (рис. 71).

Відстань від точки M_0 до точки M_1 дорівнює

$$d_2 = |M_0 M_1| = a - (1 + \sqrt{a+5}) = 4\sqrt{a+5},$$

звідки маємо $a^2 - 27a - 124 = 0 \Rightarrow a_1 = -4$ – не підходить, $a_2 = 31$, $R = 6$, $d_2 = 24$.

При цьому $d_1 < d_2$. Отже, $a = -4$, $M_1(0; -1)$.

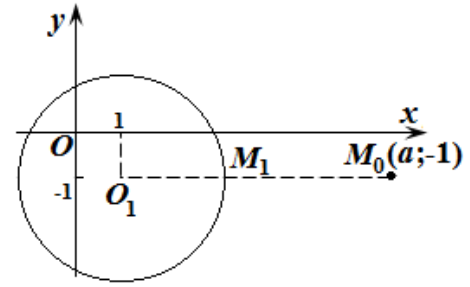


Рис. 71

Відповідь: 1) $a \in [-5; -1) \cup (4; \infty)$; 2) $a = -4$, $M_1(0; -1)$.

3.4.4. Знайдемо область визначення функції $y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$:

$$-7 - 8x - x^2 \geq 0, \quad -(x+7)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in [-7; -1].$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і перепишемо отримане рівняння у вигляді $(x+4)^2 + y^2 = 9$. Маємо рівняння верхньої половини кола ($y \geq 0$) з центром в точці $(-4; 0)$ і радіусом $R = 3$ (рис. 72).

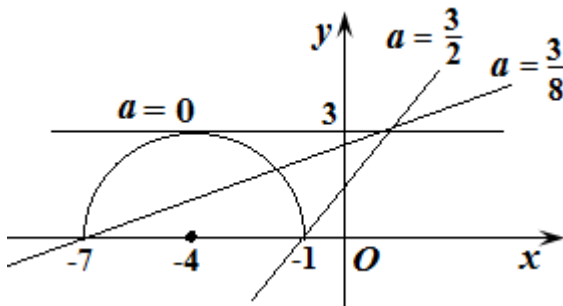


Рис. 72

Графіком функції $y = a(x-1) + 3$ при будь-якому a є пряма, що проходить через точку $(1; 3)$ і не паралельна осі Oy . На рисунку зображено три прямі, які відповідають значенням $a = 0$, $a = 3/8$ і $a = 3/2$. Вони проходять через точку $(1; 3)$ та спільні точки $(-4; 3)$, $(-7; 0)$ і $(-1; 0)$ відповідно.

Вихідна система має єдиний розв'язок у разі, коли графіки функцій $y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$ та $y = a(x-1) + 3$ мають одну спільну точку, тобто при $a = 0$ або при $3/8 < a < 3/2$.

Відповідь: $a = 0$, $a \in (3/8; 3/2)$.

3.4.5. На координатній площині лінія $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$ являє собою коло з центром в точці $B(5; 3)$ і радіусом $R = 3$. Рівність $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$ задає точку $M(2; -1)$.

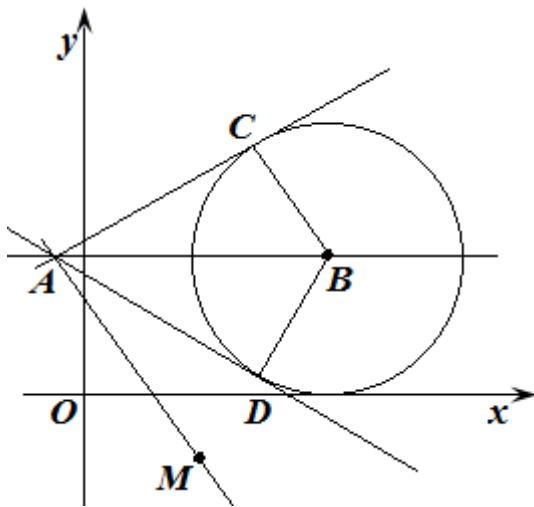


Рис. 73

Нерівність заданої системи виконується в точках $(x; y)$, які лежать на колі, всередині кола і в точці M . Система не має розв'язків тоді, коли пряма, задана рівнянням системи, не проходить через точку M і не має спільних точок з колом (рис. 73).

Пряма $y = a(x+1) + 3$ за будь-якого значення параметра a проходить через точку $A(-1; 3)$. Ця пряма не

проходить через точку M при $a \neq -4/3$ і дотикається до кола в точках C і D .

В прямокутному трикутнику $\triangle ABC$: $AB = 6$, $BC = \frac{AB}{2} = 3$, кут $\angle CAB = 30^\circ$.

Тоді кутовий коефіцієнт прямої (AC) $k_{AC} = a = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Кутовий

коефіцієнт a прямої AD дорівнює $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким чином, пряма $y = a(x+1) + 3$

не має спільних точок з колом і не проходить через точку M , якщо $a < -\frac{4}{3}$,

$-\frac{4}{3} < a < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Отже, в усіх цих випадках вихідна система не має розв'язків.

Відповідь: $a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$.

3.4.6. В заданій системі $\begin{cases} y = a + 3 + x, \\ \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$ перше рівняння задає сімейство

прямих з кутовим коефіцієнтом $k = 1$. Рівняння $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ описує верхню

половину параболи $x+1 = \frac{1}{4}(y-1)^2$ з вершиною в точці $A(-1; 1)$ і віссю

симетрії $y=1$ (рис. 74).

Розв'язками системи будуть точки перетину прямої $y=a+3+x$ з верхньою половиною параболи $x=\frac{1}{4}(y-1)^2-1$, для якої $y \geq 1$.

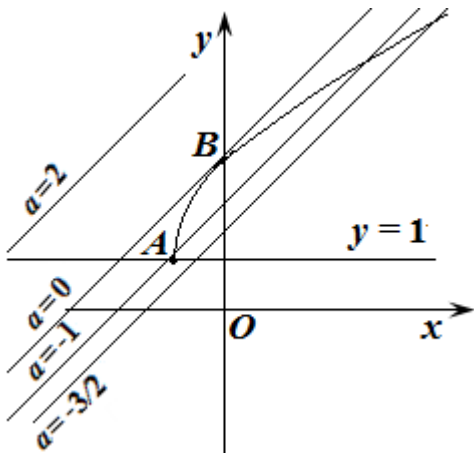


Рис. 74

Знайдемо значення параметра a , при якому прямі $y=a+3+x$ будуть дотикатися до параболи:

$$\begin{cases} x = y - a - 3, \\ y - a - 3 = \frac{1}{4}(y-1)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y - a - 3, \\ y^2 - 6y + 4a + 9 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$D = -16a = 0, \quad a = 0 \Rightarrow y = 3.$$

Тобто пряма $y = x + 3$ дотикатиметься до заданої кривої в точці $B(0; 3)$, тому при $a = 0$ маємо один розв'язок. При $a > 0$ прямі не будуть перетинати верхню половину параболи, тому розв'язків не буде. Через вершину параболи $(-1; 1)$ проходить пряма, якій відповідає $a = -1$, отже, при $a \in [-1; 0)$ система має 2 розв'язки.

Якщо $a < -1$, то система матиме один розв'язок.

Відповідь: при $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\}$ – один розв'язок; коли $a \in [-1; 0)$ – два розв'язки; якщо $a \in (0; \infty)$ – розв'язків немає.

3.4.7. 1). Якщо $x \geq a^2$, то $|x - a^2| = x - a^2$, $y(x) = x^2 - 3(x - a^2) - 5x$, або $y(x) = x^2 - 8x + 3a^2$. Графіком функції є частина параболи з гілками, напрямленими вгору, і віссю симетрії $x = -\frac{b}{2a} = 4$. Функція має екстремум в точці $x_0 = 4$.

2). Якщо $x \leq a^2$, то $|x - a^2| = -(x - a^2)$. Функція набуває вигляду $y(x) = x^2 + 3(x - a^2) - 5x$, або $y(x) = x^2 - 2x - 3a^2$.

Графік функції – частина параболи з гілками вгору і віссю симетрії $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$. Екстремум функції – в точці $x_0 = 1$.

Розглянемо всі можливі випадки графіка функції $y(x)$, зображені на рис. 75 а), б), в).

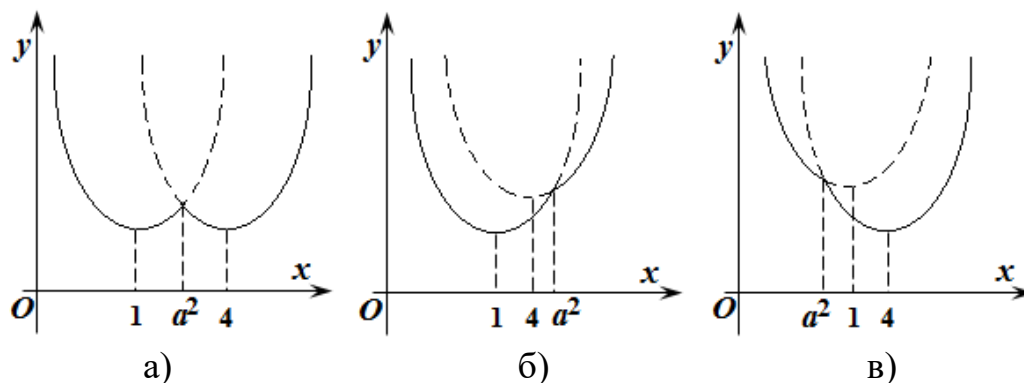


Рис. 75

Перша і друга параболи проходять через точку з координатами $(a^2; y(a^2))$. Для того, щоб графік заданої функції мав більше двох екстремумів, достатньо, щоб точка перетину двох парабол була розташована на ділянці між $x = 1$ і $x = 4$. Функція має три екстремуми тільки у випадку $1 < a^2 < 4$:

$$\begin{cases} 1 < a^2, \\ a^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a+1) > 0, \\ (a-2)(a+2) < 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Відповідь: $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

3.4.8. Перше рівняння заданої системи $y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2$ при $a = -2$ задає пряму $y = -4x - 4$, а при $a \neq -2$ – параболу.

Друге рівняння $y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 0$ визначає дві прямі $y = x$ та $y = -x$. Для того, щоб система мала чотири розв'язки, кожна з цих прямих має перетинати першу лінію двічі.

1). При $a = -2$ кожна з прямих $y = x$ і $y = -x$ перетинє пряму $y = -4x - 4$ один раз у точках $M_1\left(-\frac{4}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ і $M_2\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ відповідно (рис. 76 а).

2). Коли $a \neq -2$, пряма $y = x$ перетинає параболу у двох точках, якщо система рівнянь має два розв'язки, тобто рівняння $(a+2)x^2 + (2a-1)x + a-2 = 0$ має дискримінант $D = -4a + 17 > 0$, звідки $a < 17/4$.

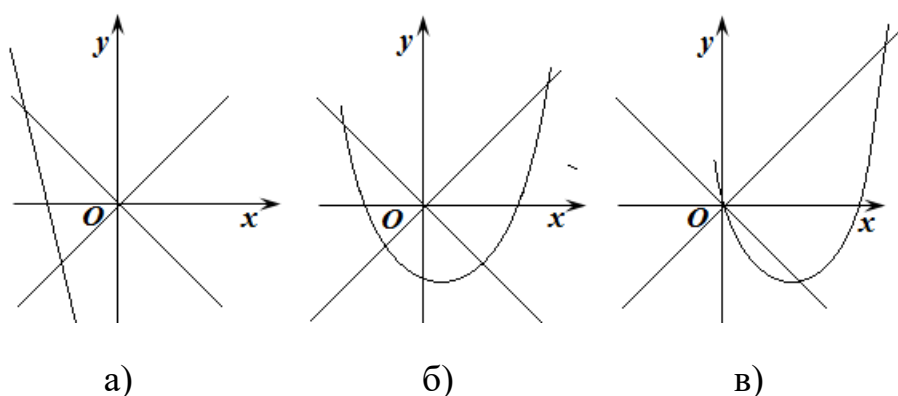


Рис. 76

Аналогічно для прямої $y = -x$ маємо:
$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2, \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a+2)x^2 + (2a+1)x + a - 2 = 0, \quad D = 4a + 17 > 0, \quad a > -\frac{17}{4} \quad (\text{рис. 76 б}).$$

3). Може статися так, що точка перетину ліній співпадає з початком координат $O(0; 0)$. В цьому випадку маємо три розв'язки, і, оскільки точка належить параболі, $a - 2 = 0$, $a = 2$ (рис. 76 в)).

Остаточно значення параметра a , при якому система рівнянь має рівно чотири розв'язки, знайдемо з системи:

$$\begin{cases} a < 17/4, \\ a > -17/4, \\ a \neq \pm 2. \end{cases} \quad a \in (-17/4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 17/4).$$

Відповідь: $a \in (-17/4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 17/4)$.

3.4.9. Перетворимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{(\sqrt{12-x^2} - y)((x+4)^2 + (y+4)^2 - 8(x+4) + x^2 - y^2 - 24)}{2-x^2} = 0, \\ y = 1 - 2a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(\sqrt{12-x^2} - y)(x^2 + 4y - 12)}{2-x^2} = 0, \\ y = 1 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{12-x^2}, \\ y = 3 - \frac{1}{4}x^2, \\ x \neq \pm\sqrt{2}, \\ y = 1 - 2a. \end{cases}$$

Геометрично рівняння $y = \sqrt{12 - x^2}$ задає верхню половину кола $x^2 + y^2 = 12$ ($y \geq 0$), $12 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 12 \Rightarrow x \in [-\sqrt{12}; \sqrt{12}]$.

При $x = \pm\sqrt{2}$ $y = \sqrt{10}$.

Друге рівняння системи задає параболу з вершиною в точці $A(0; 3)$, яка проходить через точки $M_1(-\sqrt{12}; 0)$ і $M_2(\sqrt{12}; 0)$.

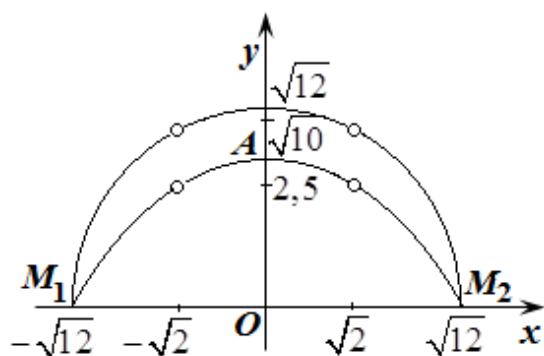


Рис. 77

При $x = \pm\sqrt{2}$ $y = 2,5$ (рис. 77).

Отже, рівно два розв'язки маємо при наступних значеннях y :

$$y \in \{0\} \cup \left\{\frac{5}{2}\right\} \cup (3; \sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; \sqrt{12}).$$

Скориставшись другим рівнянням системи, знайдемо параметр a для цих випадків:

- 1) $y = 0$, $1 - 2a = 0$, $a = \frac{1}{2}$;
- 2) $y = \frac{5}{2}$, $1 - 2a = \frac{5}{2}$, $a = -\frac{3}{4}$;
- 3) $3 < y < \sqrt{10}$, $3 < 1 - 2a < \sqrt{10}$, $1 - \sqrt{10} < 2a < -2$, $\frac{1 - \sqrt{10}}{2} < a < -1$;
- 4) $\sqrt{10} < y < \sqrt{12}$, $\sqrt{10} < 1 - 2a < \sqrt{12}$, $\frac{1 - \sqrt{12}}{2} < a < \frac{1 - \sqrt{10}}{2}$.

Відповідь: $a \in \left(\frac{1 - \sqrt{12}}{2}; \frac{1 - \sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 - \sqrt{10}}{2}; -1\right) \cup \left\{-\frac{3}{4}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3.4.10. 1). Для визначення параметра k , при якому прямі перетинаються в одній точці, розглянемо систему рівнянь заданих прямих:

$$\begin{cases} (k-1)x - y = 0, \\ (k-1)x + y - 2k = 0, \\ kx - 4y + 12 - 4k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-1)x - y = 0, \\ (k-1)x + y = 2k, \\ kx - 4y = 4k - 12. \end{cases}$$

За допомогою елементарних перетворень зведемо розширену матрицю системи до ступінчастої форми:

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} k-1 & -1 & 0 \\ k-1 & 1 & 2k \\ k & -4 & 4k-12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} k-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2k \\ 0 & -3 & 4k-12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4k-12 \\ 0 & 1 & k \\ k-1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4k-12 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 3k-4 & -4k^2+16k-12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4k-12 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 7k^2-20k+12 \end{array} \right).$$

Якщо $7k^2 - 20k + 12 = 0$, то маємо корені $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{6}{7}$. В цьому випадку система рівнянь має єдиний розв'язок, оскільки ранг основної матриці A системи і ранг її розширеної матриці A^* збігаються $RgA = RgA^* = 2$ і дорівнюють кількості невідомих $n = 2$. Це означає, що три прямі перетинаються в одній точці.

Якщо $7k^2 - 20k + 12 \neq 0$, то $RgA = 2$, а $RgA^* = 3$. Оскільки $RgA \neq RgA^*$, то система несумісна, тобто три прямі не перетинаються в одній точці.

2) Розглянемо систему рівнянь та її розширену матрицю:

$$\begin{cases} 5kx + 3y - 5k = 0, \\ 3kx + 2y - 3k = 0, \\ kx - y - k = 0, \end{cases} \quad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 5k & 3 & 5k \\ 3k & 2 & 3k \\ k & -1 & k \end{array} \right).$$

Спростуємо матрицю A^* за допомогою елементарних перетворень і визначаємо ранги матриць A^* та A :

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 5k & 3 & 5k \\ 3k & 2 & 3k \\ k & -1 & k \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} k & -1 & k \\ 3k & 2 & 3k \\ 5k & 3 & 5k \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} k & -1 & k \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} k & -1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Якщо $k = 0$, то ранги основної і розширеної матриць збігаються $RgA = RgA^* = 1$ і менші за кількість невідомих $n = 2$. Отже, система є невизначеною, вона має нескінченну множину розв'язків, тобто три прямі не перетинаються в одній точці, а зливаються в одну.

Якщо $k \neq 0$, то $RgA = RgA^* = 2$. Через те, що ранг системи збігається з кількістю невідомих, система має єдиний розв'язок, а це й означає, що в цьому випадку прямі перетинаються в одній точці.

Відповідь: 1) $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{6}{7}$; 2) $k \neq 0$.

3.4.11. 1) Розглянемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow kx + b = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + 2kx + 2b = 0, \quad D = 4k^2 - 8b.$$

Якщо пряма не перетинає параболу, то координати точок $M(k; b)$ задовольняють нерівність $D < 0$, або $4k^2 - 8b < 0$. Остаточного маємо: $b > 0,5k^2$ (рис. 78).

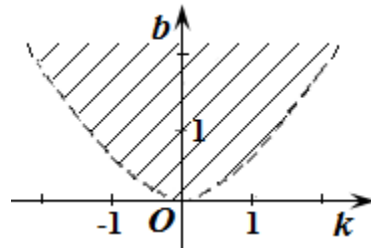


Рис. 78

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + (kx + b)^2 = 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow (4 + k^2)x^2 + 2kbx + (b^2 - 4) = 0, \\ D = -16b^2 + 16k^2 + 64 < 0.$$

Маємо $b^2 - k^2 > 4$, $\frac{b^2}{4} - \frac{k^2}{4} > 1$ (рис. 79).

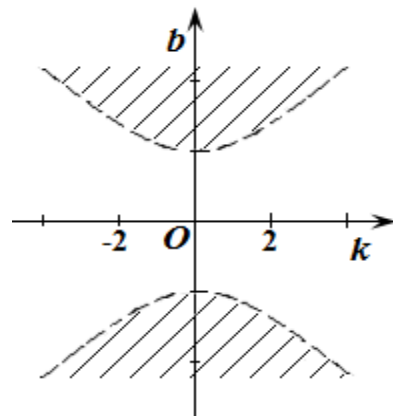


Рис. 79

3). Пряма перетинає задану гіперболу, якщо після виключення y із системи рівнянь $\begin{cases} y = kx + b, \\ x^2 - y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ отримане

квадратне рівняння має дискримінант $D = b^2 + 4k^2 - 4 > 0$, тобто $k^2 + \frac{b^2}{4} > 1$.

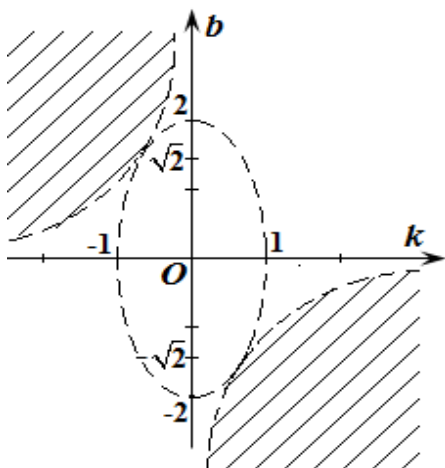


Рис. 80

Пряма не перетинатиме параболу в разі,

коли система $\begin{cases} y = kx + b, \\ y^2 + 4x = 0 \end{cases}$ зводиться

до рівняння $k^2x^2 + (2kb + 4)x + b^2 = 0$, дискримінант якого $D = kb + 1 < 0$, тобто $kb < -1$.

Таким чином, координати точок $M(k; b)$ мають задовольняти систему

$$\text{нерівностей} \quad \begin{cases} kb < -1, \\ k^2 + b^2/4 > 1 \end{cases} \quad \text{при} \quad |k| \neq 1$$

(рис. 80).

За умови $|k| = 1$ точки $M(k; b)$ лежать на прямих $k = 1$ ($b < -1$) і $k = -1$ ($b > 1$).

Відповідь: 1) а) $b > 0,5k^2$; б) $\frac{b^2}{4} - \frac{k^2}{4} > 1$; 2) $\begin{cases} kb < -1, \\ k^2 + \frac{b^2}{4} > 1 \end{cases}$ при $|k| \neq 1$;

при $|k| = 1$ точки $M(k; b)$ лежать на прямих $k = 1$ ($b < -1$) і $k = -1$ ($b > 1$).

3.5. Площина. Пряма у просторі. Поверхні

3.5.1. Нехай (P_1) – шукана площина, (l) – пряма, по якій (P_1) перетинає площину (P) .

Нормаль $\bar{N}$ площини (P) паралельна площині (P_1) (рис. 81). Загальні рівняння прямої $l = P_1 \cap P$ мають вигляд

$$\begin{cases} z = 0, \\ 5x - y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо напрямний вектор прямої (l) :

$$\bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} + 5\bar{j} \Rightarrow \bar{S} = (1; 5; 0).$$

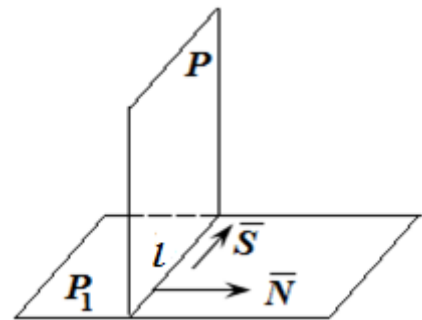


Рис. 81

В площині (P_1) лежать два непаралельні вектори $\bar{N}$ і $\bar{S}$. Векторний добуток цих векторів є нормальним вектором площини (P_1) :

$$\bar{N}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15\bar{i} - 3\bar{j} - 26\bar{k}.$$

Тоді рівняння площини (P_1) має вигляд:

$$15x - 3(y + 2) - 26z = 0, \text{ або } 15x - 3y - 26z - 6 = 0.$$

Відповідь: $15x - 3y - 26z - 6 = 0$.

3.5.2. Знайдемо рівняння площини (P_1) , яка проходить через точку M_0 і паралельна площині (P) (рис. 82).

Нормальний вектор площини (P) $\bar{N} = (3; -2; -3)$ можна взяти за нормальний вектор шуканої площини. Отже, рівняння (P_1) має вигляд:

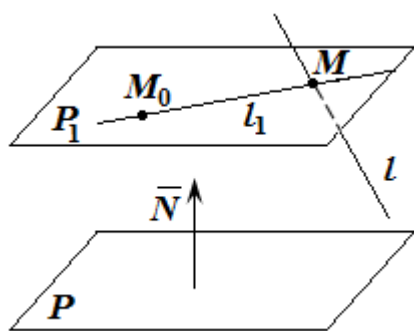


Рис. 82

$$3(x-3) - 2(y+2) - 3(z+4) = 0,$$

$$\text{або } 3x - 2y - 3z - 25 = 0.$$

Для визначення координат точки M перетину прямої (l) і площини (P_1) розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z - 25 = 0, \\ \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}. \end{cases}$$

Після перетворення рівняння прямої до параметричної форми система набирає

вигляду:
$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 25, \\ x = 2 + 3t, \\ y = -4 - 2t, \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow 3(2 + 3t) - 2(-4 - 2t) - 3(1 + 2t) - 25 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = -8, \\ z = 5 \end{cases} M(8; -8; 5).$$

Напрямний вектор прямої (l_1) $\vec{S}_1 = \overrightarrow{M_0M} = (5; -6; 9)$. Тому канонічне рівняння шуканої прямої набуває вигляду $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$.

Відповідь: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$.

3.5.3. За вказівками знаходимо $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -3; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -4; 4)$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2} < |\overrightarrow{BC}| = 4\sqrt{3}$. Сторона BC трикутника $\triangle ABC$ проєкується

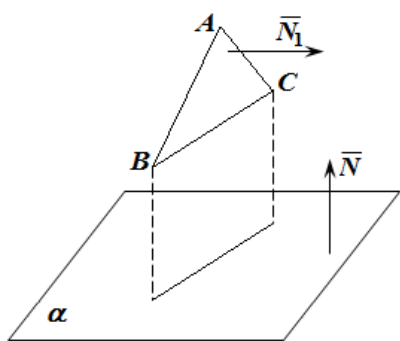


Рис. 83

на шукану площину в натуральну величину, тобто вектор $\overrightarrow{BC}$ паралельний шуканій площині, а площина трикутника ABC – перпендикулярна до неї (рис. 83).

Нехай $\vec{N} = (A_0, B_0, C_0)$ – нормаль до шуканої площини, тоді її рівняння

$$A_0(x-1) + B_0(y-1) + C_0(z-1) = 0,$$

$\overline{N} \perp \overline{BC}$ і $\overline{N} \perp \overline{N_1}$, де $\overline{N_1}$ – нормаль до площини $\triangle ABC$. Тому за $\overline{N}$ можна взяти вектор $\overline{BC} \times \overline{N_1}$.

$$\text{Маємо } \overline{N_1} = \overline{AB} \times \overline{AC} = -12(\overline{i} + \overline{j} + 0 \cdot \overline{k}), \quad \overline{N} = \overline{BC} \times \overline{N_1} = 48(\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}).$$

Тоді рівняння шуканої площини $x - 2 - y + 2 - 2(z - 2) = 0$, або $x - y - 2z + 4 = 0$.

Відповідь: $x - y - 2z + 4 = 0$.

3.5.4. Нехай вершина C має координати $C(a; b; c)$. Точка $M(x_1; y_1; z_1)$ – середина сторони AC : $x_1 = \frac{-3+a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}$, $z_1 = \frac{3+c}{2}$. Точка $N(x_2; y_2; z_2)$ – середина сторони BC : $x_2 = \frac{3+a}{2}$, $y_2 = \frac{6+b}{2}$, $z_2 = \frac{-15+c}{2}$.

Подамо рівняння прямої $\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}$ (l) в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 0, \\ z = 2t + 1. \end{cases}$$

Оскільки точка M належить прямій (l), а точка N – площині $2x - 3y + z + 7 = 0$, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{-3+a}{2} = 3t, \\ b = 0, \\ \frac{3+c}{2} = 2t+1 \\ 2 \cdot \frac{3+a}{2} - 3 \cdot \frac{6+b}{2} + \frac{-15+c}{2} + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6t + 3, \\ b = 0, \\ c = 4t - 1, \\ 2a - 3b + c - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6, \\ b = 0, \\ c = 1, \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, точка C має координати $C(6; 0; 1)$. Площа $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$, де

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 6 & 6 & -18 \\ -9 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\overline{i} + 150\overline{j} + 54\overline{k}.$$

Знаходимо $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 150^2 + 54^2} = 3\sqrt{710}$.

Відповідь: $3\sqrt{710}$.

3.5.5. Довжину висоти CD трикутника ΔABC знайдемо як відстань d від точки C до прямої AB , рівняння якої має вигляд $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ (AB).

Напрямний вектор прямої $\bar{S} = \overline{AB} = (-2; -1; 2)$, $|\overline{AB}| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

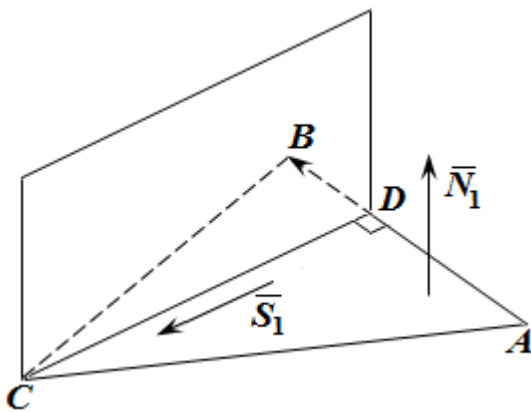


Рис. 84

$$\text{Тоді } CD = d = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AB}|},$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\bar{i} - 18\bar{j} - 10\bar{k},$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{1+324+100} = 5\sqrt{17},$$

$$\text{довжина висоти } CD = \frac{5\sqrt{17}}{3}.$$

Рівняння висоти CD знайдемо як рівняння лінії перетину площини ABC з перпендикулярною до неї площиною, що проходить через вершину C і має нормальний вектор $\bar{N} = \overline{AB}$ (рис. 84).

Рівняння площини ABC отримаємо, підставивши координати нормального вектора $\bar{N}_1 = \overline{AB} \times \overline{AC}$ в рівняння в'язки площин, які проходять через точку A : $-(x-5) - 18(y-2) - 10(z+1) = 0$, або $x + 18y + 10z - 31 = 0$.

Тоді загальні рівняння висоти CD матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x + 18y + 10z - 31 = 0, \\ 2x + y - 2z - 10 = 0. \end{cases}$$

Для того, щоб від отриманих рівнянь перейти до канонічних, знайдемо напрямний вектор прямої. За $\bar{S}_1$ можна прийняти вектор, паралельний прямій:

$$\bar{S}_1 = \bar{N}_1 \times \bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 18 & 10 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -46\bar{i} + 22\bar{j} - 35\bar{k}.$$

Отже, канонічні рівняння висоти CD : $\frac{x+1}{-46} = \frac{y-4}{22} = \frac{z+4}{-35}$.

Відповідь: $\frac{5\sqrt{17}}{3}$; $\frac{x+1}{-46} = \frac{y-4}{22} = \frac{z+4}{-35}$.

3.5.6. Пряма (l_1) проходить через точку $A_1(1; -3; -1)$ і має напрямний вектор $\bar{S}_1 = (2; 4; 3)$. Пряма (l_2) проходить через точку $A_2(0; 2; -3)$ і має напрямний вектор $\bar{S}_2 = (5; -1; 2)$ (рис. 85).

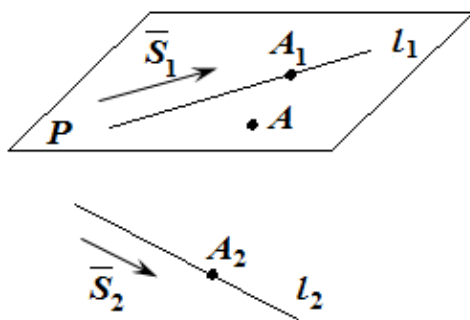


Рис. 85

Задача розв'язується по-різному в залежності від розташування прямих.

Якщо прямі не паралельні, вектор $\bar{S}_1$ не паралельний вектору $\bar{S}_2$. Коли ж прямі (l_1) і (l_2) перетинаються, то вони лежать в одній площині, і, якщо й точка A лежить в цій площині, то задача має безліч розв'язків. А якщо точка A не лежить в цій площині, то пряма, яка проходить

через точку A і точку перетину прямих, буде задовольняти умову задачі.

Але прямі (l_1) і (l_2) мимобіжні, оскільки вектори $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ і $\overline{A_1A_2}$ не лежать в одній площині, бо мішаний добуток цих векторів не дорівнює нулю:

$$\bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \cdot \overline{A_1A_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Проведемо площину (P) так, щоб вона проходила через пряму (l_1) і точку A . Вектори $\overline{AA_1} = (-3; -3; 0)$ і $\bar{S}_1 = (2; 4; 3)$ не паралельні, тоді $\bar{S}_1 \times \overline{AA_1}$ буде нормальним вектором площини (P) . Візьмемо замість вектора $\overline{AA_1}$ паралельний йому вектор $\bar{m} = (1; 1; 0)$. Маємо:

$$\bar{N} = \bar{m} \times \bar{S}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Запишемо рівняння площини (P) :

$$3(x-4) - 3y + 2(z+1) = 0 \Rightarrow 3x - 3y + 2z - 10 = 0.$$

Знайдемо точку перетину площини (P) і прямої (l_2) , розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z - 10 = 0, \\ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 2z - 10 = 0, \\ x = 5t, \\ y = -t + 2, \\ z = 2t - 3 \end{cases} \Rightarrow 22t = 22 \Rightarrow t = 1.$$

Таким чином, пряма (l_2) перетинає площину (P) в точці $M(5; 1; -1)$.

Шукана пряма проходить через точки A і M , її рівняння мають вигляд

$$\frac{x-4}{5-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}, \quad \text{або} \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

Відповідь: $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}.$

3.5.7. Прямі (l_1) і (l_2) будуть мимобіжними тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ і $\overline{R}$ не компланарні, тобто мішаний добуток $\overline{S_1} \overline{S_2} \overline{R} \neq 0$.

Найкоротша відстань між прямими d дорівнює абсолютній величині проекції вектора $\overline{R}$ на вектор $\overline{N_1} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$, тобто

$$d = |np_{\overline{N}} \overline{R}| = \left| \overline{R} \cdot \overline{N^0} \right| = \left| \overline{R} \overline{S_1} \overline{S_2} \right| / \left| \overline{S_1} \times \overline{S_2} \right|.$$

Твердження 1) і 2) доведені.

3.5.8. Очевидно, що діагональ куба AC_1 і діагональ грані, що її не перетинає (наприклад, BD), є мимобіжними прямими. Відстань між мимобіжними прямими

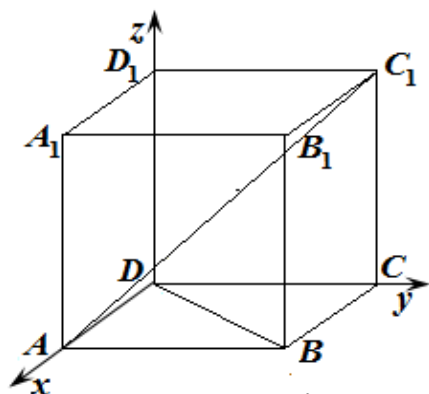


Рис. 86

дорівнює відстані від однієї з мимобіжних прямих до площини, що проходить через іншу пряму паралельно першій (рис. 86).

Нехай ребро куба дорівнює a . Тоді маємо координати напрямних векторів: $\overline{S_1} = \overline{DB} = (a; a; 0)$, $\overline{S_2} = \overline{AC_1} = (-a; a; a)$.

Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку A паралельно прямій BD . Якщо $M(x; y; z)$ – довільна точка площини, то за умови компланарності

векторів $\overline{AM}$, $\overline{S_1}$ і $\overline{S_2}$ їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто виконується

$$\text{рівність: } \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} = 0, \text{ або } x - y + 2z - a = 0.$$

Відстань між мимобіжними прямими визначимо як відстань від точки $B(a; a; 0)$ до отриманої площини:

$$d = \frac{|a - a + 0 - a|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

3.5.9. З'ясуємо взаємне розташування прямих. Для цього запишемо рівняння прямих в канонічному вигляді:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \ (l_1), \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{1} \ (l_2).$$

Візьмемо на прямих точки $M_1(0; 0; 0) \in (l_1)$, $M_2(2; 3; 0) \in (l_2)$ і утворимо вектор $\overline{M_1M_2} = (2; 3; 0)$. Напрямні вектори прямих $\overline{S_1} = (1; 1; 1)$, $\overline{S_2} = (0; 0; 1)$. Мішаний добуток $\overline{M_1M_2} \cdot \overline{S_1} \times \overline{S_2} = -1 \neq 0$, тобто прямі (l_1) і (l_2) мимобіжні.

Знайдемо рівняння площини (P) , що проходить через пряму (l_1) паралельно (l_2) . Довільна точка $M(x; y; z)$ належить площині (P) тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\overline{M_1M_2} \cdot \overline{S_1} \times \overline{S_2} = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } x - y = 0 \ (P).$$

Відстань між мимобіжними прямими знайдемо як відстань від точки M_2 до отриманої площини: $d = \frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.5.10. Запишемо рівняння прямих у параметричному вигляді:

$$(l_1) \begin{cases} x = 3 + t_1, \\ y = 1 + 8t_1, \\ z = 2 + 4t_1, \end{cases} \quad (l_2) \begin{cases} x = -1 + t_2, \\ y = 1 + 2t_2, \\ z = -2t_2, \end{cases}$$

Прямі (l_1) і (l_2) проходять через точки $M_1(3; 1; 2)$ та $M_2(-1; 1; 0)$ відповідно і мають напрямні вектори $\bar{S}_1 = (1; 8; 4)$ та $\bar{S}_2 = (1; 2; -2)$. Вектор $\bar{R} = \overline{M_1M_2} = (-4; 0; -2)$. Обчислимо мішаний добуток

$$\overline{M_1M_2} \cdot \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 108 \neq 0,$$

отже, прямі (l_1) і (l_2) мимобіжні. Відстань між прямими знайдемо за формулою $d = \frac{|\bar{R} \cdot \bar{S}_1 \times \bar{S}_2|}{|\bar{S}_1 \times \bar{S}_2|}$.

$$\text{Векторний добуток } \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -24\bar{i} + 6\bar{j} - 6\bar{k}, \text{ його модуль}$$

$$|\bar{S}_1 \times \bar{S}_2| = \sqrt{(-24)^2 + 6^2 + (-6)^2} = 18\sqrt{2}. \text{ Тоді } d = \frac{|\bar{R} \cdot \bar{S}_1 \times \bar{S}_2|}{|\bar{S}_1 \times \bar{S}_2|} = \frac{108}{18\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Тепер знайдемо рівняння спільного перпендикуляра до (l_1) і (l_2) . За його напрямний вектор візьмемо $\bar{S} = \frac{1}{6}(\bar{S}_1 \times \bar{S}_2) = (-4; 1; -1)$.

З іншого боку за напрямний вектор спільного перпендикуляра можна взяти вектор $\bar{S}_0 = \overline{N_1N_2}$, де N_1, N_2 – точки перетину спільного перпендикуляра (N_1N_2) з прямими (l_1) і (l_2) відповідно.

Запишемо в параметричній формі координати точок $N_1(3 + t_1; 1 + 8t_1; 2 + 4t_1)$, $N_2(-1 + t_2; 1 + 2t_2; -2t_2)$ та вектора

$$\overline{N_1N_2} = (t_2 - t_1 - 4; 2t_2 - 8t_1; -2t_2 - 4t_1 - 2).$$

Оскільки вектор $\bar{S}_0 \parallel \bar{S}$, то координати цих векторів пропорційні і для визначення параметрів t_1, t_2 маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} t_2 - t_1 - 4 = -8t_2 + 32t_1, \\ -2t_2 + 8t_1 = -2t_2 - 4t_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6t_1 = -1, \\ 9t_2 - 33t_1 - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2 = -\frac{1}{6},$$

$\overline{S_0} = \overline{N_1 N_2} = (-4; 1; -1)$. Тому рівняння спільного перпендикуляра $(N_1 N_2)$ матиме вигляд $\frac{x-17/6}{-4} = \frac{y+1/3}{1} = \frac{z-4/3}{-1}$.

Відповідь: $3\sqrt{2}$; $\frac{x-17/6}{-4} = \frac{y+1/3}{1} = \frac{z-4/3}{-1}$.

3.5.11. 1). Кут між мимобіжними прямими знаходять, як кут між двома прямими, що перетинаються і паралельні заданим мимобіжним прямим. В нашому випадку кут між A_1B і AD_1 – це кут AD_1C між прямими AD_1 і D_1C , оскільки $D_1C \parallel A_1B$ (рис. 87).

Трикутник $\triangle AD_1C$ – рівносторонній (всі його сторони – діагоналі граней квадрата), отже, шуканий кут $\angle AD_1C = 60^\circ$.

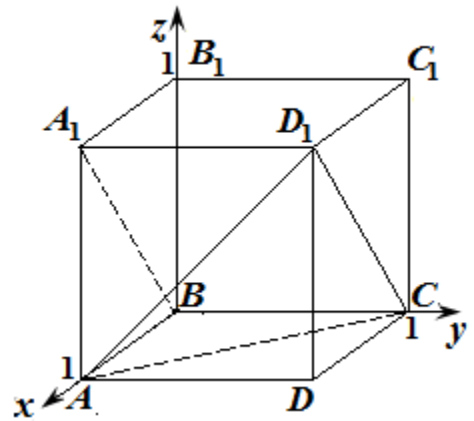


Рис. 87

2). Відстань між мимобіжними діагоналями граней A_1B і AD_1 знайдемо як відстань від точки A_1 до площини (P) , що проходить через AD_1 паралельно A_1B . Координати напрямних векторів діагоналей: $\overline{S_1} = \overline{A_1B} = (-1; 0; -1)$, $\overline{S_2} = \overline{AD_1} = (0; 1; 1)$. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка площини (P) , тоді $\overline{AM} \cdot \overline{S_1} \times \overline{S_2} = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - z - 1 = 0 (P).$$

Відстань між діагоналями: $d = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

3). Запишемо рівняння діагоналей в параметричній формі

$$(A_1B): \begin{cases} x = 1 - t_1, \\ y = 0, \\ z = 1 - t_1, \end{cases} \quad (AD_1): \begin{cases} x = 1, \\ y = t_2, \\ z = t_2. \end{cases}$$

Візьмемо за напрямний вектор спільного перпендикуляра вектор $\overline{S_0} = \overline{N_1 N_2}$, де $N_1(1-t_1; 0; 1-t_1)$, $N_2(1; t_2; t_2)$, ($N_1 \in (A_1 B)$, $N_2 \in (AD_1)$).

Умовою паралельності векторів $\overline{S_0} = (t_1; t_2; t_2 - 1 + t_1)$ і $\overline{S} = \overline{S_1} \times \overline{S_2} = (1; 1; -1)$ є пропорційність їхніх координат. Це дозволяє записати систему рівнянь для визначення параметрів t_1 і t_2 , що відповідають точкам перетину:

$$\begin{cases} t_1 = t_2, \\ t_1 = -t_2 - 1 - t_1 \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{звідки отримуємо точки перетину}$$

перпендикуляра з діагоналями $N_1\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$, $N_2\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Тоді рівняння спільного перпендикуляра до діагоналей, який проходить через N_2 , має вигляд $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1/3}{-2} = z - \frac{1}{3}$.

Відповідь: 60° ; $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1/3}{-2} = z - \frac{1}{3}$.

3.5.12. Запишемо рівняння площин (P_1) і (P_2) в нормальному вигляді. Для цього помножимо їх на нормувальний множник μ , знак якого протилежний знаку вільного члена.

Нормальні вектори площин $\overline{N_1} = (1; -3; 2)$ і $\overline{N_2} = (3; -2; -1)$, їх модулі

$$|\overline{N_1}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14} \quad \text{і} \quad |\overline{N_2}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{\sqrt{14}}$. Тоді рівняння площин мають вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{14}}x - \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{2}{\sqrt{14}}z - \frac{5}{\sqrt{14}} = 0 \quad (P_1), \quad -\frac{3}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{z}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} = 0 \quad (P_2).$$

Величина $\delta(M, P_1) = \frac{1}{\sqrt{14}}x - \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{2}{\sqrt{14}}z - \frac{5}{\sqrt{14}}$ – це відхилення точки $M(x; y)$, яка належить бісекторній площині, від площини (P_1) . Тоді $\delta(M, P_2) = -\frac{3}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{z}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}}$ – відхилення цієї точки від площини (P_2) .

Модулі цих величин є відстанями від точки $M(x; y)$ до площин (P_1) і (P_2) відповідно. Для бісекторних площин, які ми шукаємо, ці відстані

однакові, отже, їхні рівняння запишуться так:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{14}}x - \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{2}{\sqrt{14}}z - \frac{5}{\sqrt{14}} \right| = \left| -\frac{3}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{z}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{14}}x - \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{2}{\sqrt{14}}z - \frac{5}{\sqrt{14}} = \pm \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{z}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

.Маємо рівняння двох бісекторних площин

$$\begin{cases} 4x - 5y + z - 2 = 0, \\ 2x + y - 3z + 8 = 0, \end{cases}$$

які при перетині утворюють чотири двогранні кути.

Відповідь: $4x - 5y + z - 2 = 0$, $2x + y - 3z + 8 = 0$.

5.13. Маємо ромб $PMQR$ (рис. 88). Знайдемо координати точки O перетину

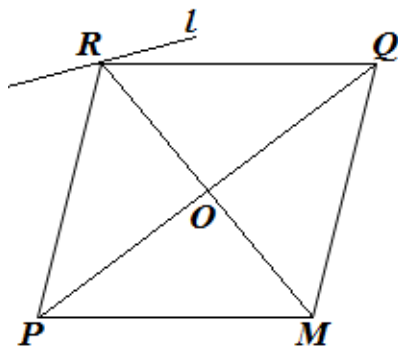


Рис. 88

діагоналей ромба:

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2,$$

$$y_O = \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{6 - 2}{2} = 2,$$

$$z_O = \frac{z_P + z_Q}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2.$$

Пряма (PQ) має рівняння $\frac{x}{4} = \frac{y+2}{6+2} = \frac{z+4}{8+4}$, або $x = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{3}$,

отже, її напрямний вектор $\vec{S} = (1; 2; 3)$. Тоді рівняння площини, яка проходить через точку O перпендикулярно (PQ) , запишеться так:

$$(x - 2) + 2(y - 2) + 3(z - 2) = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z - 12 = 0.$$

Для визначення координат вершини R подамо рівняння прямої (l) в параметричній формі і знайдемо параметр t , який відповідає точці її перетину з отриманою площиною:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 2t, \\ z = 3t, \\ x + 2y + 3z = 12 \end{cases} \Rightarrow 12t = 12, \quad t = 1, \quad R(-1; 2; 3).$$

Тоді координати четвертої вершини: $x_M = 2x_O - x_R = 5$, $y_M = 2y_O - y_R = 2$, $z_M = 2z_O - z_R = 1$, тобто $M(5; 2; 1)$.

$$\text{Площа ромба: } S = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2}PQ \cdot MR = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+144} \cdot \sqrt{36+4} = 8\sqrt{35}.$$

Відповідь: $(5; 2; 1)$; $8\sqrt{35}$.

3.5.14. Проекцією прямої (l) на площину (P) є пряма (l_1), по якій перетинаються площини (P) і ABC . Пряма (l_1) проходить через пряму (l) і перпендикулярна площині (P) (рис. 89).

Напрямний вектор прямої $\vec{S} = (2; 2; -1)$ і нормаль до площини (P) $\vec{N} = (3; -1; 2)$ перпендикулярні до нормального вектора $\vec{N}_1$

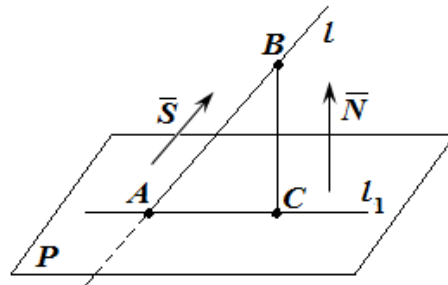


Рис. 89

площини ABC .

Отже, векторний добуток $\vec{N} \times \vec{S}$ дає нормальний вектор площини ABC :

$$\vec{N}_1 = \vec{S} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 7\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Тоді рівняння площини ABC набуває вигляду $3(x-1) - 7y - 8(z+2) = 0$, або $3x - 7y - 8z - 19 = 0$. Таким чином, отримуємо рівняння проекції (l_1)

$$\begin{cases} 3x - 7y - 8z - 19 = 0, \\ 3x - y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} 3x - 7y - 8z - 19 = 0, \\ 3x - y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$

3.5.15. Утворимо площину (P), яка проходить через точку $A(2; -4; 5)$ перпендикулярно до прямої (l) (рис. 90).

За нормальний вектор площини можна прийняти напрямний вектор прямої (l) $\vec{N} = \vec{S} = (-3; 1; -4)$. Отже, рівняння площини (P) буде виглядати

$$\begin{aligned} -3(x-2) + (y+4) - 4(z-5) &= 0, \\ \text{або } -3x + y - 4z + 30 &= 0. \end{aligned}$$

Знайдемо координати точки O перетину прямої (l) і площини (P):

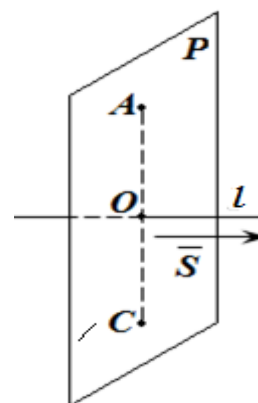


Рис. 90

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{4}, \\ -3x + y - 4z + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3t + 1, \\ y = t - 3, \\ z = 4t + 3, \\ -3x + y - 4z + 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = 2, \quad O(-5; -1; 11).$$

Точка O є серединою відрізка AC , де C – шукана точка, симетрична точці A відносно прямої (l) . Тоді $C(-12; 2; 17)$.

Відповідь: $C(-12; 2; 17)$.

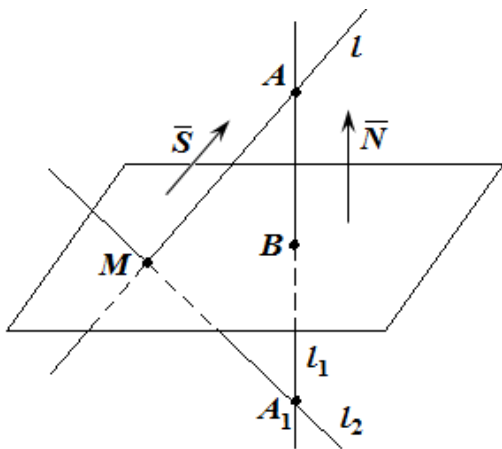


Рис. 91

3.5.16. Прямая (l) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1}$ з напрямним вектором $\bar{S} = (2; 2; -1)$ проходить через точку $A(1; 0; -2)$. Площина $3x - y + 2z - 7 = 0$ (P) має нормальний вектор $\bar{N} = (3; -1; 2)$ (рис. 91).

Знайдемо координати точки M перетину прямої (l) і площини (P) . Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1}, \\ 3x - y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2t, \\ z = -t - 2, \\ 3x - y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2t, \\ z = -t - 2, \\ 6t - 2t - 2t - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 4, \quad x = 9, \quad y = 8, \quad z = -6, \quad M(9; 8; -6).$$

Запишемо рівняння прямої (l_1) , яка проходить через точку A перпендикулярно площині (P) . За напрямний вектор прямої можна взяти нормальний вектор площини $\bar{S}_1 = \bar{N}$, тоді отримаємо рівняння прямої (l_1) :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

Координати точки B перетину прямої (l_1) з площиною (P) визначимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}, \\ 3x-y+2z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t+1, \\ y=-t, \\ z=2t-2, \\ 3x-y+2z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t+1, \\ y=-t, \\ z=2t-2, \\ 9t+3+t+4t-4-7=0, \end{cases}$$

звідки знаходимо $t = \frac{4}{7}$, $B\left(\frac{19}{7}; -\frac{4}{7}; -\frac{6}{7}\right)$.

Знайдемо координати точки A_1 , яка симетрична точці A відносно площини (P) . Оскільки точка B є серединою відрізка AA_1 , отримаємо $A_1\left(\frac{31}{7}; -\frac{8}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

Прямою, симетричною прямій (l) відносно площини (P) , буде пряма (l_2) , яка проходить через точки M і A_1 :

$$\frac{x-9}{\frac{31}{7}-9} = \frac{y-8}{-\frac{8}{7}-8} = \frac{z+6}{\frac{2}{7}+6}, \quad \text{або} \quad \frac{x-9}{-8} = \frac{y-8}{-16} = \frac{z+6}{11}.$$

Відповідь: $\frac{x-9}{-8} = \frac{y-8}{-16} = \frac{z+6}{11}$.

3.5.17. Нехай ребро куба дорівнює 1. Розмістимо початок координат у вершині B куба (рис. 92).

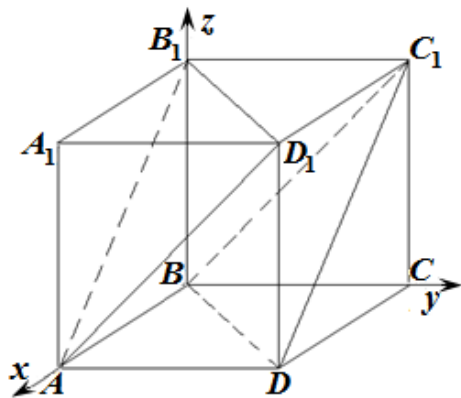


Рис. 92

Складемо рівняння площини AB_1D_1 :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + z - 1 = 0,$$

її нормальний вектор $\bar{N}_1 = (1; -1; 1)$.

Знайдемо рівняння площини BC_1D :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + z = 0,$$

тож її нормальний вектор $\bar{N}_2 = (1; -1; 1)$.

Оскільки $\bar{N}_1 = \bar{N}_2$, то площини AB_1D_1 і BC_1D паралельні. Відстань між ними можна знайти як відстань від точки B до площини AB_1D_1 :

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Діагональ куба $AC_1 = \sqrt{AD^2 + DC^2 + CC_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Отже, $d = \frac{1}{3}AC_1$, що й треба було довести.

3.5.18. Три площини перетинаються по одній прямій, коли їхні нормальні вектори $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ і $\bar{N}_3$ лежать в одній площині, але не паралельні один одному.

1). Нормальні вектори площин $\bar{N}_1 = (1; -1; 1)$, $\bar{N}_2 = (3; -1; -1)$, $\bar{N}_3 = (4; -1; 2)$ не паралельні, оскільки їх координати не пропорційні. Але вони не лежать в одній площині при жодних значеннях параметра λ , оскільки мішаний добуток

$$\bar{N}_1 \bar{N}_2 \bar{N}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

В цьому випадку при жодних значеннях параметра λ три площини не перетинаються по одній прямій.

2). Очевидно, що нормальні вектори площин $\bar{N}_1 = (1; \lambda; 1)$, $\bar{N}_2 = (3; -1; 1)$, $\bar{N}_3 = (4; -1; -2)$ не паралельні. З'ясуємо, чи лежать вони в одній площині.

$$\text{Знайдемо } \bar{N}_1 \bar{N}_2 \bar{N}_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 10\lambda + 4.$$

Мішаний добуток дорівнює нулю при $\lambda = -0,4$. Отже, при цьому значенні λ три площини перетинаються по одній прямій (рис. 93).

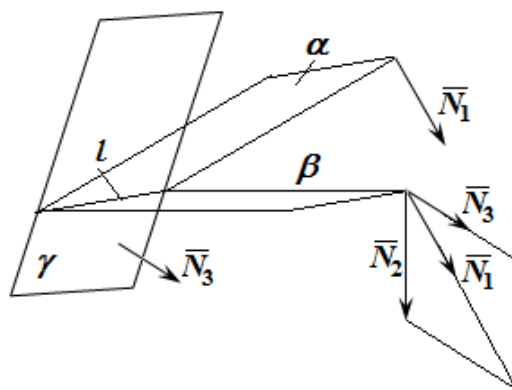


Рис. 93

Відповідь: 1) при жодному λ ;

2) при $\lambda = -0,4$.

3.5.19. Перший спосіб. Центр вписаної у піраміду сфери лежить на перетині бісекторних площин її двограних кутів. Нехай $AOBC$ – піраміда, обмежена площинами ABC , AOB , AOC , COB (рис. 94). В цей многогранник можна вписати сферу за умови, що всі бісекторні площини (площини, які ділять всі двогранні кути навпіл), перетинаються в одній точці.

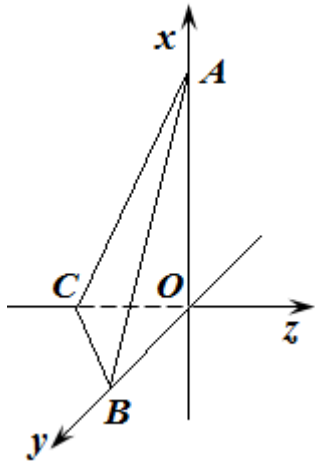


Рис. 94

Для того, щоб записати рівняння бісекторних площин, треба рівняння всіх площин, на яких лежать грані піраміди, представити в нормальному вигляді. Рівняння координатних площин $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ вже мають такий вигляд. Нормалізуємо рівняння площини $2x + 3y - 6z - 4 = 0$ (ABC), помноживши обидві його частини на нормуючий множник

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{7}.$$

Тоді рівняння площини ABC запишеться у вигляді

$$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} = 0.$$

Рівняння усіх бісекторних площин мають вигляд: $|x| = |y|$, $|y| = |z|$, $|x| = |z|$,

$$\left| \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} \right| = |x|, \quad \left| \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} \right| = |y|, \quad \left| \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} \right| = |z|.$$

Після розкриття модулів кожне з цих рівнянь дає два рівняння. Серед усіх рівнянь треба вибрати ті площини, які знаходяться всередині піраміди. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = y, & y = -z, & x = -z, \\ \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} = -x, \\ \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} = -y, \\ \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{4}{7} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y, & y = -z, & x = -z, \\ 9x + 3y - 6z - 4 = 0, \\ 2x + 10y - 6z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - 13z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -z, & x = -z, \\ -9z - 3z - 6z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{2}{9}.$$

Отже, центр сфери знаходиться в точці $K\left(\frac{2}{9}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{9}\right)$, координати якої задовольняють рівняння всіх бісекторних площин.

Другий спосіб. Нехай центр сфери знаходиться в точці $K(r; r; -r)$, де $r > 0$. Тоді відстань від цієї точки до площини ABC також дорівнює r :

$$r = \frac{|2r + 3r + 6r - 4|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \Rightarrow \frac{11r - 4}{7} = \pm r.$$

Таким чином маємо сукупність рівнянь

$$\begin{cases} \frac{11r - 4}{7} = -r \Rightarrow 18r = 4 \Rightarrow r = \frac{2}{9} \Rightarrow K\left(\frac{2}{9}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{9}\right), \\ \frac{11r - 4}{7} = r \Rightarrow 4r = 4 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow K(1; 1; -1). \end{cases}$$

Оскільки точка $K(1; 1; -1)$ знаходиться зовні піраміди, цей розв'язок не підходить. Отже, центр сфери знаходиться в точці $K\left(\frac{2}{9}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{9}\right)$.

Відповідь: $K\left(\frac{2}{9}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{9}\right)$.

3.5.20. Зведемо рівняння поверхні до канонічного вигляду:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + (z^2 + 2z + 1) - 1 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$. Отримали канонічне рівняння сфери з центром в точці $O'(2; 1; -1)$ і радіусом $R = 2$. Знайдемо відстань від центру сфери до площини $2x + y - 2z - 7 = 0$: $d = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|4 + 1 + 2 - 7|}{3} = 0$. Тобто площина проходить через центр сфери, а тіло, обмежене заданими поверхнями,

це півкуля з радіусом $R = 2$ і об'ємом $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{16\pi}{3}$ (куб.од.).

Відповідь: $16\pi/3$ куб.од.

3.5.21. Запишемо рівняння сфери у канонічному вигляді:

$$x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + z^2 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1,$$

отримали сферу з центром $O_1(0; 1; 0)$.

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку O_1 перпендикулярно площині $x - 2y - 2z + 8 = 0$. За напрямний вектор прямої візьмемо нормальний вектор площини $\vec{S} = \vec{N} = (1; -2; -2)$. Тоді параметричні рівняння

перпендикуляра мають вигляд
$$\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = -2t. \end{cases}$$

Визначимо точку перетину перпендикуляра зі сферою, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=t, \\ y=1-2t, \\ z=-2t, \\ x^2+y^2+z^2=2y \end{cases} \Rightarrow 9t^2=1, \quad t=\pm\frac{1}{3}.$$

Маємо дві точки $M_1\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Відстань від M_1 до

площини $d_1 = \frac{\left|\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 8\right|}{\sqrt{1+4+4}} = 3$, а від точки M_2 — $d_2 = \frac{\left|-\frac{1}{3} - \frac{10}{3} - \frac{4}{3} + 8\right|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$.

Тобто найближчою до площини є точка $M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$, її відстань до площини дорівнює 1.

Відповідь: $\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 1.

3.5.22. Для визначення координат центру і радіуса зведемо рівняння сфери до канонічного вигляду:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad O_1(1; 0; 0), \quad R=1.$$

Складемо рівняння площини, що проходить через центр сфери і

перпендикулярна заданій прямій $\begin{cases} x=3-t, \\ y=2+2t, \\ z=4+t \end{cases} (l)$. В якості нормального вектора

площини візьмемо напрямний вектор прямої (l) : $\overline{N} = \overline{S} = (-1; 2; 1)$. Тоді

рівняння площини виглядатиме: $-1 \cdot (x-1) + 2y + z = 0$, або $x - 2y - z - 1 = 0$.

Найближчу до сфери точку M_0 , яка належить прямій (l) , знайдемо як точку перетину площини і прямої, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=3-t, \\ y=2+2t, \\ z=4+t, \\ x-2y-z=1 \end{cases} \Rightarrow 6t+6=0 \Rightarrow t=-1, \quad M_0(4; 0; 3).$$

Відстань від центру сфери до точки M_0 : $O_1M_0 = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. Отже, відстань від найближчої точки прямої до сфери: $d = O_1M_0 - R = 3\sqrt{2} - 1$.

Відповідь: $3\sqrt{2} - 1$.

3.5.23. Запишемо рівняння прямої, на якій лежить відрізок AB , в параметричному вигляді:
$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$
 Точці A відповідає значення параметра

$t_A = 0$, а точці B — $t_B = 1$, тобто на відрізку AB $t \in [0; 1]$. Приведемо рівняння сфери до вигляду $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Сфера має центр в точці $C(0; 0; 1)$, її радіус $R = 1$.

Нехай $D(x; y; z)$ — довільна точка на відрізку $[AB]$. Розглянемо

$$\begin{aligned} |CD|^2 &= x^2 + y^2 + (z-1)^2 = (1+t)^2 + (2+t)^2 + (3-t-1)^2 = \\ &= (1+t)^2 + (2+t)^2 + (2-t)^2. \end{aligned}$$

Найкоротшу відстань від C до $[AB]$ знайдемо з умови мінімуму функції $U(t) = (1+t)^2 + (2+t)^2 + (2-t)^2$ при $t \in [0; 1]$. Похідна $U'(t) = 2 + 6t = 0$ при $t = -\frac{1}{3} \notin [0; 1]$. На проміжку $[0; 1]$ похідна $U'(t) > 0$, тобто функція $U(t)$ монотонно зростає. Найменше значення $|CD|$ приймає тоді, коли точка D співпадає з точкою A , тобто $|CD|_{\min} = |CA| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Отже, $d_{\min} = |CA| - R = 2$.

Точку на сфері, відстань від якої до $[AB]$ найкоротша, знайдемо як точку перетину прямої $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ (CA) зі сферою:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = 1 + 2t, \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 9t^2 = 1, \quad t = \pm \frac{1}{3}.$$

Маємо дві точки: при $t = \frac{1}{3}$ $M_1\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$, при $t = -\frac{1}{3}$ $M_2\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Відстані $|M_1A| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 2$ і $|M_2A| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 4$.

Оскільки $|M_1A| < |M_2A|$, то шукана точка $M_1\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Відповідь: $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$;

3.5.24. Перше рівняння системи $x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0$ являє собою сферу

$x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ з центром в точці $C(0; -2; 0)$ і радіусом $R = 2$. Друге

рівняння задає площину $x + a(y+z) = a$ з нормальним вектором $\bar{N} = (1; a; a)$

Система рівнянь має розв'язок, якщо відстань від центра сфери до площини не

перевищує радіуса сфери: $\frac{|1 \cdot 0 + a \cdot (-2) + a \cdot 0 - a|}{\sqrt{1 + a^2 + a^2}} \leq 2 \Rightarrow |-3a| \leq 2\sqrt{1 + 2a^2}$,

звідки отримаємо $a^2 \leq 4$, $|a| \leq 2$.

Площина дотикається до сфери (а система має єдиний розв'язок) при $a = \pm 2$. Маємо дві дотичні площини: $x + 2(y+z) = 2$ і $x - 2(y+z) = -2$. Точками дотику є точки перетину перпендикулярів, проведених з центрів сфер до цих площин.

При $a = 2$ напрямним вектором перпендикуляра є нормальний вектор площин $\bar{S}_1 = \bar{N}_1 = (1; 2; 2)$. Координати точки дотику M_1 визначимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 2t, \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + 2(-2 + 2t) + 4t - 2 = 0, \\ 9t = 6, \\ t_1 = \frac{2}{3}, \end{cases} \quad M_1\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

При $a = -2$ напрямний вектор $\bar{S}_2 = \bar{N}_2 = (1; -2; -2)$. Для визначення координат другої точки дотику M_2 розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=t, \\ y=-2-2t, \\ z=-2t, \\ x-2y-2z=-2 \end{cases} \Rightarrow t-2(-2-2t)-4t+2=0, \quad 9t=-6, \quad t_2=-\frac{2}{3}, \quad M_2\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Відповідь: система рівнянь має розв'язки при $|a| \leq 2$; розв'язок єдиний, коли $|a| = 2$ — $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ при $a = 2$, $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ при $a = -2$.

3.5.25. Площа перетину кулі $S = \pi R_1^2 = 30\pi \Rightarrow R_1^2 = 30$, $R_1 = \sqrt{30}$. Рівняння кулі радіуса $R = 6$ з центром в точці $C(x_0; y_0; z_0)$ шукаємо у вигляді:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 36.$$

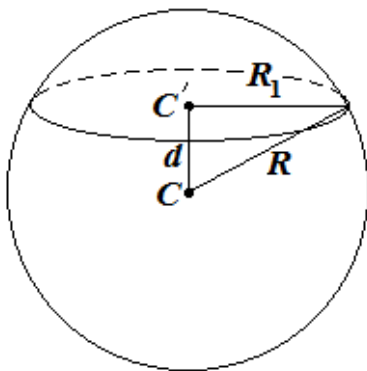


Рис. 95

1). Якщо центр кулі лежить на прямій $x = y = z$, то точка C має координати $C(x_0; x_0; x_0)$. Відстань від центру кулі до площини перетину

$$d = \frac{|x_0 - 2x_0 - x_0 - 2|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|-2x_0 - 2|}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Тоді } R^2 = d^2 + R_1^2 \Rightarrow 36 = \frac{4(x_0 + 1)^2}{6} + 30 \Rightarrow$$

$$(x_0 + 1)^2 = 9, \quad (x_0)_{1,2} = \pm 3 - 1 \quad (\text{рис.95}).$$

При $(x_0)_1 = 2$ центр кулі $C_1(2; 2; 2)$, а при $(x_0)_2 = -4$ — $C_2(-4; -4; -4)$.

2). У випадку, коли центр кулі лежить на осі Oy , маємо: $x_0 = z_0 = 0$, $C(0; y_0; 0)$, $d = \frac{|0 - 2y_0 - 0 - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|-2y_0 - 2|}{\sqrt{6}}$, $R^2 = d^2 + R_1^2 \Rightarrow (y_0)_{1,2} = \pm 3 - 1$.

Координати центру кулі: $C_1(0; 2; 0)$, $C_2(0; -4; 0)$.

Відповідь: 1) $C_1(2; 2; 2)$, $C_2(-4; -4; -4)$; 2) $C_1(0; 2; 0)$, $C_2(0; -4; 0)$.

3.5.26. Шукане коло утворено шляхом перетину сфери та площини. Запишемо рівняння сфери у вигляді $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$. Центр сфери — точка $C(0; 0; 5)$, радіус $R = 5$ (рис. 95). Центр кола C' визначимо як точку перетину перпендикуляра, опущеного з центру сфери на площину. За напрямний вектор

прямої можна взяти нормальний вектор площини $\bar{S} = \bar{N} = (1; 2; 2)$. Тоді проекцію центра сфери на площину знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = 5 + 2t, \\ x + 2y + 2z = 19 \end{cases} \Rightarrow t = 1, \quad C'(1; 2; 7).$$

Радіус кола $R_1 = \sqrt{R^2 - d^2}$, де $d = |CC'| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. Тобто $R_1 = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Відповідь: $(1; 2; 7); 4$.

3.5.27. Рівняння сфери шукаємо у вигляді $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = R^2$.

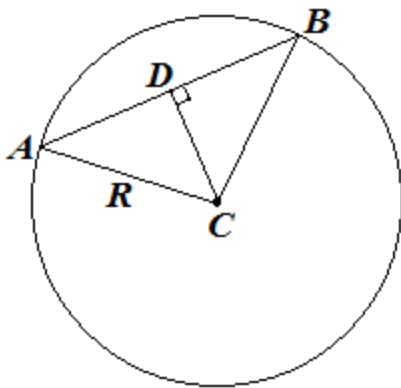


Рис. 96

Для визначення радіуса сфери (рис. 96) зведемо рівняння прямої (AB) до параметричного вигляду. За напрямний вектор прямої $\bar{S}$ візьмемо вектор, колінеарний вектору $\bar{S}_1 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$, де $\bar{N}_1 = (5; -4; 1)$, $\bar{N}_2 = (3; -4; 1)$:

$$\bar{S}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 8\bar{i} + 4\bar{j} - 8\bar{k}, \quad \bar{S} = (2; 1; -2).$$

Точку на прямій знайдемо як спільну точку двох площин. Покладемо $y = 0$, а інші координати визначимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 3y + 20 = 0, \\ 3x + z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3(8 - 3x) + 20 = 0, \\ z = 8 - 3x \end{cases} \Rightarrow x = 11, \quad z = -25, \quad M(11; 0; -25).$$

Тоді параметричні рівняння прямої матимуть вигляд
$$\begin{cases} x = 11 + 2t, \\ y = t, \\ z = -25 - 2t. \end{cases}$$

Утворимо площину, яка проходить через центр сфери перпендикулярно прямій (AB) . Основу D перпендикуляра, проведеного до прямої (AB) з центра сфери C , знайдемо як точку перетину цієї площини з прямою (AB) . В якості нормального вектора площини візьмемо напрямний вектор прямої: $\bar{N} = \bar{S} = (2; 1; -2)$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=11+2t, \\ y=t, \\ z=-25-2t, \\ 2 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-3) - 2(z+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -7, \quad D(-3; -7; -11).$$

Тоді $|CD| = \sqrt{25+100+100} = 15$. Трикутник $\triangle ABC$ – рівнобедрений, CD – висота і медіана: $CD = \frac{1}{2} AB = 8$.

В прямокутному трикутнику $\triangle ADC$: $AC = R = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$.

Остаточно рівняння сфери набуває вигляду $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

Відповідь: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

3.5.28. Площини, до яких дотикається сфера, паралельні, оскільки виконується

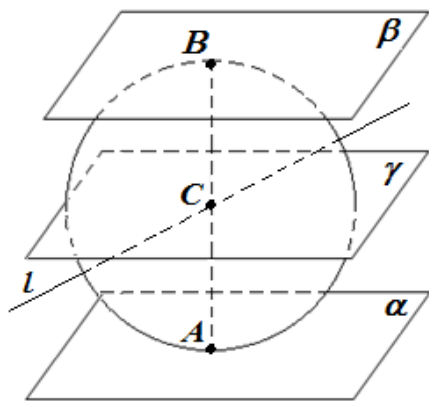


Рис. 97

умова $\bar{N}_1 = -\bar{N}_2$ (рис. 97), тому діаметр сфери можна знайти як відстань від довільної точки, наприклад, $M(0; 0; -2)$ площини $2z - 2x - y + 4 = 0$ (α) до площини $2x + y - 2z - 6 = 0$ (β):

$$D = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}.$$

Радіус сфери $R = \frac{D}{2} = \frac{1}{3}$. Центр сфери розташований в площині (γ) і рівновіддалений від площин (α) і (β), тому для будь-якої точки $N(x; y; z)$ цієї площини виконується умова: $\frac{|2x + y - 2z - 6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2x + y - 2z - 4|}{\sqrt{4+1+4}} \Rightarrow 2x + y - 2z - 6 = \pm(2x + y - 2z - 4)$.

Отже, рівняння площини (γ) $2x + y - 2z - 5 = 0$. Координати центра сфери знайдемо як точку перетину прямої $-x = \frac{y+1}{-2} = z$ (l) з площиною (γ). Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді: $x = -t$, $y = -2t - 1$, $z = t$. Підставивши вирази для x, y, z в рівняння площини, маємо $-2t - 2t - 1 - 2t - 5 = 0$,

звідки $t = -1$. Внесемо тепер це значення t в параметричні рівняння прямої (l) , знайдемо координати центра сфери: $x_C = 1$, $y_C = 1$, $z_C = -1$. Отже, рівняння сфери $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{9}$.

Відповідь: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{9}$.

3.5.29. Знайдемо центр сфери C як точку перетину трьох площин: перпендикулярних до дотичних прямих $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-6}{4}$ (l_1),

$\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-6}$ (l_2) і площини, що проходить через середину хорди $|AB|$ перпендикулярно до неї.

За нормальний вектор площини, яка проходить через точку A перпендикулярно (l_1), візьмемо напрямний вектор прямої $\bar{N}_1 = \bar{S}_1 = (3; 6; 4)$. Тоді рівняння площини запишеться: $3(x-1) + 6(y+4) + 4(z-6) = 0$. Аналогічно для площини, що проходить через точку B $\bar{N}_2 = \bar{S}_2 = (2; 1; -6)$, рівняння площини має вигляд: $2(x-4) + (y+3) - 6(z-2) = 0$.

Обчислимо координати середини відрізка AB (точки M):

$$x_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \quad y_M = \frac{-4-3}{2} = -\frac{7}{2}, \quad z_M = \frac{6+2}{2} = 4, \quad M\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right).$$

Нормальний вектор третьої площини $\bar{N}_3 = \overline{AB} = (3; 1; -4)$. Рівняння площини: $3\left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y + \frac{7}{2}\right) - 4(z-4) = 0$. Координати точки C знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} 3(x-1) + 6(y+4) + 4(z-6) = 0, \\ 2(x-4) + (y+3) - 6(z-2) = 0, \\ 3\left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y + \frac{7}{2}\right) - 4(z-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y + 4z = 3, \\ 2x + y - 6z = -7, \\ 3x + y - 4z = -12. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -58; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -7 & 1 & -6 \\ -12 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 290,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & -6 \\ 3 & -12 & -4 \end{vmatrix} = -174, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

Отримали $x = \frac{290}{-58} = -5$; $y = \frac{-174}{-58} = 3$; $z = \frac{0}{-58} = 0$, $C(-5; 3; 0)$.

Радіус сфери $R = |AC| = \sqrt{36 + 49 + 36} = \sqrt{121} = 11$. Рівняння сфери набуває вигляду $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 121$.

Відповідь: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 121$.

3.5.30. Запишемо рівняння сфери у вигляді $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 + (z - 3)^2 = 25$.

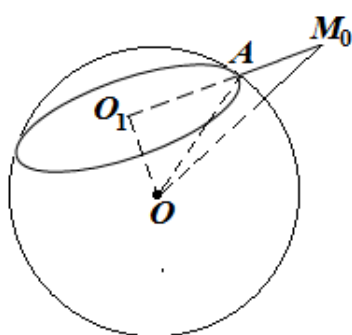


Рис. 98

Центр сфери знаходиться в точці $O(-2; 6; 3)$, радіус $R = 5$.

Оскільки $|OM_0|^2 = 1^2 + 6^2 + 2^2 = 41 > 25$, то точка $M_0(-1; 0; 1)$ лежить поза сферою, а отже, поза колом. Але точка M_0 належить площині $2x + 2y + z + 1 = 0$, бо $2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 = 0$ (рис. 98).

Тоді відстань $d_{\min} = |AM_0| = |O_1M_0| - r$, де $r = |O_1A|$. Знайдемо r , для чого спочатку визначимо $d_1 = |OO_1| = \frac{|2 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 4$.

В прямокутному трикутнику ΔO_1OA гіпотенуза $|OA| = R = 5$, тоді $|O_1A| = r = 3$. А в трикутнику ΔOO_1M_0 гіпотенуза $|OM_0| = \sqrt{41}$, тому $|O_1M_0| = \sqrt{|OM_0|^2 - d_1^2} = \sqrt{41 - 16} = 5$. Отже, найкоротша відстань від M_0 до кола $d_{\min} = |O_1M_0| - r = 5 - 3 = 2$.

Для визначення координат центра O_1 кола, знайдемо точку перетину прямої (OO_1) з площиною $2x + 2y + z + 1 = 0$, в якій лежить коло. Пряма (OO_1) перпендикулярна цій площині, тому рівняння (OO_1) має вигляд $\frac{x+2}{2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{1}$, або в параметричному вигляді $x = 2t - 2$, $y = 2t + 6$, $z = t + 3$.

З системи рівнянь
$$\begin{cases} x = 2t - 2, \\ y = 2t + 6, \\ z = t + 3, \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$
 знаходимо $t = -\frac{4}{3}$. Отож, центр кола –

точка $O_1\left(-\frac{14}{3}; \frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Відповідь: 2; $O_1\left(-\frac{14}{3}; \frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

3.5.31. Центр сфери $C(0; -1; 1)$ належить площині $x + 2y + 2z = 0$, бо $0 - 2 + 2 = 0$. Тоді задане коло – коло великого круга сфери, отже, коло має центр в точці C і його радіус також дорівнює $R = 2$. Рівняння шуканої площини, що проходить через початок координат, запишемо у вигляді $Ax + By + Cz = 0$, або $x + \alpha y + \beta z = 0$, де $\alpha = \frac{B}{A}$, $\beta = \frac{C}{A}$. Для визначення α і β скористаємося тим, що ця площина перпендикулярна площині $x + 2y + 2z = 0$, тобто вектор $\overline{N}_1 = (1; \alpha; \beta)$ перпендикулярний вектору $\overline{N}_2 = (1; 2; 2)$ і $\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0 \Rightarrow 1 + 2\alpha + 2\beta = 0$. Друге рівняння для визначення α і β отримаємо з умови, що відстань від $C(0; -1; 1)$ до шуканої площини дорівнює половині радіуса кола:

$$\frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta|}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}} = 1.$$

Маємо систему рівнянь
$$\begin{cases} 1 + 2\alpha + 2\beta = 0, \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 1 + \alpha^2 + \beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\alpha + 2\beta = 0, \\ 2\alpha\beta = -1, \end{cases}$$

звідки знаходимо $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = -1$. Отже, шукана площина може мати рівняння $2x - 2y + z = 0$, або $2x + y - 2z = 0$. Отримані площини взаємно перпендикулярні і перпендикулярні площині $x + 2y + 2z = 0$, в якій лежить коло.

Відповідь: $2x - 2y + z = 0$, $2x + y - 2z = 0$.

3.5.32. Згідно з вказівкою шукане коло є лінією перетину площини ABC з певною сферою. Складемо рівняння площини ABC :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-5 \\ -1-3 & 6+2 & -8 \\ 1-3 & -4+2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - z - 1 = 0.$$

Нормальний вектор площини $\bar{N} = (2; 0; -1)$.

Рівняння сфери має вигляд $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. Тут $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – центри сфер, розташованих на перпендикулярі до знайденої площини, який проходить через середину відрізка $[AB]$. За напрямний вектор прямої візьмемо нормальний вектор площини $\bar{S} = \bar{N} = (2; 0; -1)$. Координати середини відрізка $[AB]$ дорівнюють

$$x = \frac{3-1}{2} = 1, \quad y = \frac{-2+6}{2} = 2, \quad z = \frac{5-3}{2} = 1.$$

Тож рівняння геометричного місця центрів сфер: має вигляд
$$\begin{cases} x_0 = 1 + 2t, \\ y_0 = 2 + 0 \cdot t, \\ z_0 = 1 - t. \end{cases}$$

Підставимо x_0, y_0, z_0 в рівняння сфери. Отримаємо:

$$(x - 2t - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + t - 1)^2 = R^2.$$

Радіуси сфер знайдемо за умови, що кола і сфери одночасно проходять через точку $C(1; -4; 1)$:

$$(1 - 2t - 1)^2 + (-4 - 2)^2 + (1 + t - 1)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = 36 + 5t^2.$$

Остаточно рівняння сфер виглядатимуть:

$$(x - 2t - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + t - 1)^2 = 36 + 5t^2$$

Задача має нескінченну множину розв'язків, оскільки рівняння шуканого кола може бути записано у вигляді:

$$\begin{cases} (x - 2t - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + t - 1)^2 = 36 + 5t^2, \\ 2x - z - 1 = 0, \quad t \in R. \end{cases}$$

Наприклад, при $t = 0$ отримаємо коло великого круга сфери $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 36$, яке лежить у площині $2x - z - 1 = 0$.

Відповідь: задача має нескінченну множину розв'язків

$$\begin{cases} (x-2t-1)^2 + (y-2)^2 + (z+t-1)^2 = 36 + 5t^2, \\ 2x - z - 1 = 0, \quad t \in R. \end{cases}$$

3.5.33. Розглянемо трикутник $\triangle ABC$: $\overline{AB} = (-4; -3; 0)$, $\overline{AC} = (-4; 0; 0)$, $\overline{BC} = (0; 3; 0)$. Скалярний добуток $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = -4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BC}$, тобто трикутник $\triangle ABC$ – прямокутний з прямим кутом $\angle ACB$. Центр кола, описаного навколо трикутника, лежить на середині гіпотенузи AB і має координати $N\left(1; -\frac{1}{2}; 1\right)$, радіус кола $R = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{16+9+0} = \frac{5}{2}$. Оскільки всі три вершини A , B і C мають однакову аплікату $z=1$, то шукане коло є великим колом сфери, що лежить в площині $z=1$ і має рівняння

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{25}{4}, \\ z=1. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1/2)^2 + (z-1)^2 = 25/4, \\ z=1. \end{cases}$

3.5.34. Нехай $M_0(0; y_0; z_0)$ – довільна точка межі тіні на площині yOz .

Проведемо через M_0 пряму, паралельну прямій $\begin{cases} z=0, \\ y=x, \end{cases}$ або $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$. Маємо

$\frac{x}{1} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{0}$. Ця пряма дотикається до сфери. Тому для визначення координат точки дотику $M(x; y; z)$ отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z = z_0, \\ x = y - y_0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x, \end{cases}$$

яка зводиться до квадратного рівняння $(y-y_0)^2 + y^2 + z_0^2 = 4(y-y_0)$, або $2y^2 - 2y(y_0+2) + y_0^2 + z_0^2 + 4y_0 = 0$.

Це рівняння повинно мати рівні корені, тобто його дискримінант

$$D = 4(y_0+2)^2 + 4 \cdot 2 \cdot (y_0^2 + z_0^2 + 4y_0) = 0,$$

$$\text{або } D = (y_0 + 2)^2 + 2 \cdot (y_0^2 + z_0^2 + 4y_0) = 0.$$

Звідси знаходимо залежність між координатами будь-якої точки $M_0(y_0; z_0)$ межі тіні на площині yOz , тобто її рівняння $\frac{(y_0 + 2)^2}{8} + \frac{z_0^2}{4} = 1$.
Отримали еліпс з центром в точці $C(-2; 0)$ і півсями $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$.

Відповідь: $\frac{(y_0 + 2)^2}{8} + \frac{z_0^2}{4} = 1$.

3.5.35. Нехай $M_1(0; y_1; z_1)$ – довільна точка межі тіні на площині yOz .

Проведемо через M_1 і точку $M_0(5; 0; 0)$ пряму $\frac{x-5}{-5} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$. Оскільки пряма дотикається до сфери, то для визначення точки дотику $M(x; y; z)$ запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 5 - \frac{5}{y_1} y, \\ z = \frac{z_1}{y_1} y, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \left(5 - \frac{5}{y_1} y\right)^2 + y^2 + \left(\frac{z_1}{y_1} y\right)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{25}{y_1^2} + 1 + \frac{z_1^2}{y_1^2}\right) y^2 - \frac{50}{y_1} y + 16 = 0.$$

Корені отриманого квадратного рівняння мають бути рівними. В цьому випадку дискримінант дорівнює нулю, тобто

$$D = 625 - 16(25 + y_1^2 + z_1^2) = 0 \Rightarrow y_1^2 + z_1^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2.$$

Отримали рівняння межі тіні на площині yOz – це коло з центром у початку координат і радіусом $R = \frac{15}{4}$.

Відповідь: $y_1^2 + z_1^2 = (15/4)^2$.

3.5.36. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка простору. Запишемо рівняння прямої

$$(l) \begin{cases} x - y = 0, \\ x - z = 0 \end{cases} \text{ у канонічному вигляді } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}. \text{ Пряма } (l) \text{ проходить через}$$

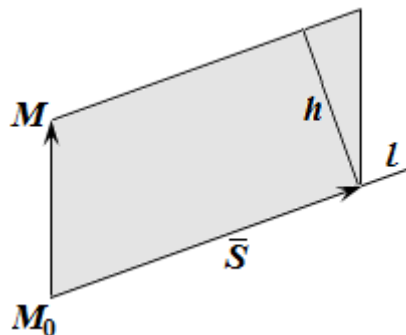


Рис. 99

точку $M_0(0; 0; 0)$ і має напрямний вектор $\bar{S} = (1; 1; 1)$.

Для того, щоб знайти відстань від точки M до прямої (l) , необхідно поділити на модуль вектора $\bar{S}$ площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_0M}$ і $\bar{S}$ (рис. 99). Координати вектора $\overline{M_0M} = (x; y; z)$, тож маємо векторний добуток:

$$\overline{M_0M} \times \bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y - z)\bar{i} - (x - z)\bar{j} + (x - y)\bar{k}.$$

В результаті отримаємо для шуканої відстані формулу

$$h = \frac{|\overline{M_0M} \times \bar{S}|}{|\bar{S}|} = \frac{\sqrt{(y - z)^2 + (x - z)^2 + (x - y)^2}}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(y - z)^2 + (x - z)^2 + (x - y)^2}.$$

Оскільки точки M віддалені від прямої (l) на відстань $2\sqrt{3}/3$, остаточно отримаємо:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(y - z)^2 + (x - z)^2 + (x - y)^2}, \text{ або } (y - z)^2 + (x - z)^2 + (x - y)^2 = 4.$$

Відповідь: $(y - z)^2 + (x - z)^2 + (x - y)^2 = 4$.

3.5.37. Оскільки сфера перетинає площину $x = 0$ по колу з центром у початку координат, то центр сфери розташований на осі Ox . Нехай $O(x_0; 0; 0)$ – центр шуканої сфери, R – її радіус. Тоді відстань від O до центра заданого кола $O_1(0; 0; 0)$ дорівнює: $|OO_1| = |x_0|$, як відстань від O до площини $x = 0$. Тоді $R^2 = 11 + x_0^2$, де $r = \sqrt{11}$ – радіус даного кола.

З іншого боку, R – це відстань від центра сфери O до дотичної площини $x - y - z + 5 = 0$, тобто $R = |x_0 + 5|/\sqrt{3}$.

З системи рівнянь $\begin{cases} R^2 = 11 + x_0^2, \\ R = |x_0 + 5|/\sqrt{3} \end{cases}$ знаходимо x_0 і R :

$$2x_0^2 - 10x_0 + 8 = 0, \quad (x_0)_1 = 4, \quad (x_0)_2 = 1; \quad R_1^2 = 11 + 16 = 27; \quad R_2^2 = 11 + 1 = 12.$$

Отже, отримали дві сфери $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 27$ і $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 12$.

Відповідь: $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 27$, $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 12$.

3.5.38. Запишемо рівняння прямої у вигляді: $\begin{cases} 4x - y + 4 = 0, \\ x + z - 12 = 0 \end{cases} \quad (l).$ Оскільки

шукана площина проходить через пряму (l) , то її рівняння можна записати:

$$4x - y + 4 + \lambda(x + z - 12) = 0 \Rightarrow (4 + \lambda)x - y + \lambda z + 4 - 12\lambda = 0.$$

Для визначення параметра λ зведемо рівняння сфери до канонічного вигляду $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 81$. Центр сфери – точка $O_1(2; 3; 1)$, радіус $R = 9$. Відстань від центра сфери до площини дорівнює:

$$d = R = \frac{|(4 + \lambda)2 - 3 + \lambda + 4 - 12\lambda|}{\sqrt{(4 + \lambda)^2 + 1 + \lambda^2}} \Rightarrow 9 = \frac{|9 - 9\lambda|}{\sqrt{2\lambda^2 + 8\lambda + 17}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -8.$$

Тоді рівняння двох дотичних площин набувають вигляду:

$$4x - y + 4 - 2(x + z - 12) = 0 \quad \text{і} \quad 4x - y + 4 - 8(x + z - 12) = 0,$$

$$\text{або} \quad 2x - y - 2z + 28 = 0 \quad \text{і} \quad 4x + y + 8z - 100 = 0.$$

Відповідь: $2x - y - 2z + 28 = 0$, $4x + y + 8z - 100 = 0$.

3.5.39. Площина $2x - y - z - 8 = 0$ (P) є дотичною площиною до поверхні,

рівняння якої запишемо у вигляді $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - 36z = 0$. Нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка дотику. Скористаємося рівнянням дотичної площини:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x_0(x - x_0) + 18y_0(y - y_0) - 36(z - z_0) = 0, \quad \text{або}$$

$$\Rightarrow 8x_0x + 18y_0y - 36z - 8x_0^2 - 18y_0^2 + 36z_0 = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на 36:

$$\frac{2}{9}x_0 + \frac{1}{2}y_0y - z - \frac{2}{9}x_0^2 - \frac{1}{2}y_0^2 + z_0 = 0.$$

Порівнявши коефіцієнти отриманого рівняння з коефіцієнтами дотичної площини (P), отримаємо систему рівнянь для визначення координат точки дотику:

$$\begin{cases} \frac{2}{9}x_0 = 2, \\ \frac{1}{2}y_0 = -1, \\ -\frac{2}{9}x_0^2 - \frac{1}{2}y_0^2 + z_0 = -8. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, маємо $x_0 = 9$, $y_0 = -2$, $z_0 = 12$. Тобто площина з поверхнею мають одну спільну точку $M_0(9; -2; 12)$.

Відповідь: $(9; -2; 12)$.

3.5.40. Розглянемо першу пряму (l_1), до якої дотикаються кулі. Вона є перетином

двох площин $\begin{cases} y = 0, \\ z = a \end{cases}$ з нормальними векторами $\bar{N}_1(0; 1; 0)$ і $\bar{N}_2(0; 0; 1)$.

Напрямний вектор прямої $\bar{S}_1 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}$, тобто $\bar{S}_1 = (1; 0; 0)$.

Пряма (l_1) проходить через точку $M_1(0; 0; a)$, а її рівняння має вигляд

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-a}{0}.$$

Друга пряма (l_2) $\begin{cases} x = 0, \\ z = -a \end{cases}$ утворена в результаті перетину площин

з нормальними векторами $\bar{N}_3(1; 0; 0)$ і $\bar{N}_4(0; 0; 1)$. Напрямний вектор

прямої $\bar{S}_2 = \bar{N}_3 \times \bar{N}_4 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{j}$. Пряма проходить через точку

$M_2(0; 0; -a)$, її рівняння має вигляд $\frac{x}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z+a}{0}$. Прямі (l_1) і (l_2) – мимобіжні.

Нехай центр кулі – точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Знайдемо радіус кулі як відстань від центра кулі до точок її дотику з прямими (l_1) і (l_2) . Скористаємося формулою з 3.5.36. Для першої прямої (l_1) координати точки дотику до кулі $M_1(x; 0; a)$, вектор $\overline{M_0M_1} = (x - x_0; -y_0; a - z_0)$,

$$\overline{S_1} \times \overline{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x - x_0 & -y_0 & a - z_0 \end{vmatrix} = -(a - z_0)\overline{j} - y_0\overline{k},$$

$$R = h_1 = \frac{|\overline{S_1} \times \overline{M_0M_1}|}{|\overline{S_1}|} = \frac{\sqrt{(-(a - z_0))^2 + (-y_0)^2}}{\sqrt{1 + 0 + 0}} = \sqrt{(a - z_0)^2 + y_0^2}.$$

Точка дотику кулі до другої прямої (l_2) має координати $M_2(0; y; -a)$, $\overline{M_0M_2} = (-x_0; y - y_0; -a - z_0)$,

$$\overline{S_2} \times \overline{M_0M_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ -x_0 & y - y_0 & -a - z_0 \end{vmatrix} = (a + z_0)\overline{i} - x_0\overline{k},$$

$$R = h_2 = \frac{|\overline{S_2} \times \overline{M_0M_2}|}{|\overline{S_2}|} = \frac{\sqrt{(a + z_0)^2 + (-x_0)^2}}{\sqrt{0 + (-1)^2 + 0}} = \sqrt{(a + z_0)^2 + x_0^2}.$$

Тоді геометричне місце центрів куль знайдемо з рівняння:

$$\sqrt{(a - z_0)^2 + y_0^2} = \sqrt{(a + z_0)^2 + x_0^2} \Rightarrow$$

$$a^2 - 2az_0 + z_0^2 + y_0^2 = a^2 + 2az_0 + z_0^2 + x_0^2,$$

$$\text{або } -2az_0 + y_0^2 = +2az_0 + x_0^2.$$

Отже, отримали канонічне рівняння гіперболічного параболоїда $y^2 - x^2 = 4az$.

Відповідь: $y^2 - x^2 = 4az$.

3.5.41. Запишемо рівняння прямих (l_1) і (l_2) в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t_1, \end{cases} (l_1), \quad \begin{cases} x = t_2, \\ y = 1, \\ z = 0, \end{cases} (l_2),$$

а рівняння прямої (l) – в канонічному вигляді: $\frac{x}{t_2} = \frac{y}{1} = \frac{z - t_1}{-t_1}$.

Напрямний вектор (l) $\vec{S} = (t_2; 1; -t_1)$. За умовою пряма (l) паралельна площині $x + y + z = 4$ (P) з нормальним вектором $\vec{N} = (1; 1; 1)$, тобто $\vec{S} \cdot \vec{N} = 0$, або $t_2 + 1 - t_1 = 0$.

Виразимо тепер x, y, z з рівняння (l) через t_1, t_2 і виключимо ці параметри з отриманого рівняння. Маємо $x = t_2 y$, $z = t_1 - t_1 y = t_1(1 - y)$.

Заміняючи t_2 на $t_2 = \frac{x}{y}$, а t_1 на $t_1 = \frac{z}{1 - y}$, отримаємо $\frac{x}{y} + 1 - \frac{z}{1 - y} = 0$, або $y^2 + xy + yz - x - y = 0$ – це і є рівняння шуканої поверхні.

Відповідь: $y^2 + xy + yz - x - y = 0$.

3.5.42. 1) Запишемо рівняння будь-якої прямої, що проходить через точку

$$M_0(1; 1; 1): \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-1}{p} = t, \text{ або в параметричній формі } \begin{cases} x = mt + 1, \\ y = nt + 1, \\ z = pt + 1. \end{cases}$$

За визначенням прямолінійної твірної $\forall t \in R$ має виконуватись тотожність $(mt + 1)^2 + (nt + 1)^2 - (pt + 1)^2 \equiv 1$, отримана з рівняння поверхні $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Перетворивши тотожність до вигляду $(m^2 + n^2 - p^2)t^2 + 2t(m + n - p) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} m^2 + n^2 - p^2 = 0, \\ m + n - p = 0 \end{cases} \Rightarrow m^2 - (n + p)m = 0, m(m - n - p) = 0, \text{ маємо:}$$

1.а) $m=0$, тоді $n=p$ і рівняння твірної має вигляд $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-1}{n}$,
або $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$;

1.б) $m \neq 0$, тоді $\begin{cases} m = n + p, \\ m = p - n \end{cases} \Rightarrow 2m = 2p, \quad m = p, \quad n = 0$ і рівняння твірної буде $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$.

2) Якщо поверхня задана рівнянням $2xy + yz - xz = 2$, то має виконуватись тотожність $t^2(2mn + np - mp) + t(m + 3n) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2mn + np - mp = 0, \\ m + 3n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2mn + p(n - m) = 0, \\ m + 3n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3n^2 - 2np = 0, \quad n(3n - 2p) = 0;$$

2.а) коли $n=0$, то $m=0$, тоді рівняння твірної виглядатиме $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{p}$, або $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$;

2.б) коли $n \neq 0$, то $3n - 2p = 0$, $n = \frac{2}{3}p$, $m = -2p$ і рівняння твірної матиме вигляд $\frac{x-1}{-2p} = \frac{y-1}{2p/3} = \frac{z-1}{p}$, або $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Відповідь: 1) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$; 2) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$,
 $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

3.5.43. Рівняння конуса, що проходить через точку $S(0; 3; 0)$, шукаємо у вигляді $x^2 + z^2 = \alpha(y-3)^2$, $\alpha = \text{const}$. Тоді твірні конуса, які лежать в площині $z=0$, мають рівняння $\begin{cases} z=0, \\ x^2 + z^2 = \alpha(y-3)^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \alpha(y-3)^2, \quad x = \pm\sqrt{\alpha}(y-3)$, або $\pm\sqrt{\alpha}y - x \mp 3\sqrt{\alpha} = 0$. Ці твірні є дотичними до кола $x^2 + y^2 = 4$, утвореного перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ з площиною $z=0$. Відстань від центра сфери

до дотичних дорівнює радіусу кола, тобто $d = 2 = \frac{|\sqrt{\alpha} \cdot 0 - 0 - 3\sqrt{\alpha}|}{\sqrt{\alpha + 1}}$, звідки

$$\text{маємо: } 2 = \frac{3\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + 1}}, \quad 2\sqrt{\alpha + 1} = 3\sqrt{\alpha}, \quad \alpha = \frac{4}{5}.$$

Отже, рівняння конуса: $x^2 + z^2 = \frac{4}{5}(y - 3)^2$, або $4(y - 3)^2 = 5(x^2 + z^2)$.

Відповідь: $4(y - 3)^2 = 5(x^2 + z^2)$.

3.5.44. Рівняння площини, яка проходить через точку $(1; 1; 4)$, шукаємо в канонічному вигляді:

$$A(x - 1) + B(y - 1) + C(z - 4) = 0 \Rightarrow x - 1 + \frac{B}{A}(y - 1) + \frac{C}{A}(z - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + \alpha(y - 1) + \beta(z - 4) = 0, \quad \text{де } \alpha = \frac{B}{A}, \quad \beta = \frac{C}{A}.$$

З умови дотику площини $z = 0$ і параболу $y^2 = 8x$ отримуємо:

$$\begin{cases} x - 1 + \alpha(y - 1) + \beta(z - 4) = 0, \\ z = 0, \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{8} - 1 + \alpha y - \alpha - 4\beta = 0 \Rightarrow y^2 + 8\alpha y - 8(1 + \alpha + 4\beta) = 0.$$

Дискримінант останнього рівняння має дорівнювати нулю $D = 32(2\alpha^2 + \alpha + 4\beta + 1) = 0$, тобто

$$2\alpha^2 + \alpha + 4\beta + 1 = 0. \quad (1)$$

Аналогічно з умови дотику площини $y = 0$ і параболу $z^2 = 32x$ матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - 1 + \alpha(y - 1) + \beta(z - 4) = 0, \\ y = 0, \\ z^2 = 32x \end{cases}$$

яка приводить до рівняння

$$\frac{z^2}{32} - 1 - \alpha + \beta z - 4\beta = 0, \quad \text{або} \quad z^2 + 32\beta z - 32(1 + \alpha + 4\beta) = 0,$$

дискримінант якого $D = 128(8\beta^2 + \alpha + 4\beta + 1) = 0$, або

$$8\beta^2 + \alpha + 4\beta + 1 = 0 \quad (2).$$

З урахуванням (1) і (2), маємо $\alpha = \pm 2\beta$. Підставивши $\alpha = 2\beta$ в (1), знаходимо:

$$8\beta^2 + 6\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -1/4, \quad \beta_2 = -1/2, \quad \alpha_1 = -1/2, \quad \alpha_2 = -1.$$

При $\alpha = -2\beta$ рівняння (1) набуває вигляду $8\beta^2 + 2\beta + 1 = 0$, його дискримінант $D = -28 < 0 \Rightarrow \beta \in \emptyset$.

Таким чином, отримуємо рівняння двох дотичних площин $4x - 2y - z + 2 = 0$ і $2x - 2y - z + 4 = 0$.

Відповідь: $4x - 2y - z + 2 = 0, \quad 2x - 2y - z + 4 = 0$.

3.6. Задачі різного змісту

3.6.1. Нехай $g(x) = f\left(x + \frac{1}{5}\right) - f(x)$. Якщо хорда графіка $y = f(x)$ паралельна осі абсцис, то це означає, що для деякого $x \in \left[0; \frac{4}{5}\right]$ $g(x) = 0$.

$$\text{Маємо } g(0) + g\left(\frac{1}{5}\right) + g\left(\frac{2}{5}\right) + g\left(\frac{3}{5}\right) + g\left(\frac{4}{5}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

В цій сумі, крім нульових доданків, присутні пари сусідніх доданків протилежних знаків. В силу того, що $g(x)$ – неперервна функція, в деякій проміжній точці вона обертається на нуль – що й треба було довести.

3.6.2. Довільній точці M прямої l відповідає радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$. При повороті площини довжина вектора $\vec{a}$ зберігається, отже, параметр t не змінюється. Це означає, що точці M_1 відповідає радіус-вектор $\vec{r}' = \vec{r}_0' + t\vec{a}'$.

Середина відрізка $[MM_1]$ має радіус-вектор $\frac{1}{2}(\vec{r} + \vec{r}') = \frac{1}{2}(\vec{r}_0 + \vec{r}_0') + t\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a}')$.

Це векторне рівняння задає пряму, яка і є геометричним місцем середин відрізків $[MM_1]$ при повороті площини.

Відповідь: пряма.

3.6.3. Точка, що рухалась по колу $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$, після припинення дії сили починає рухатись по дотичній до кола. Рівняння дотичної, що

проведена в точці A : $y - y(x_A) = y'(x_A)(x - x_A)$. Знайдемо $y'(x)$ як похідну неявно заданої функції:

$$2x + 2yy' - 8 + 4y' = 0, \quad y'(x) = \frac{8 - 2x}{2y + 4}. \quad \text{При } x = 1, \quad y = 2 \quad y'(A) = \frac{3}{4}.$$

Тоді маємо траєкторію руху точки $y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$, або $3x - 4y + 5 = 0$ (пряма).

Відповідь: пряма $3x - 4y + 5 = 0$.

3.6.4. Використовуючи нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох додатних чисел, а також рівняння еліпса, можна записати:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2}} = 2\frac{|xy|}{ab} \Rightarrow |xy| \leq \frac{ab}{2},$$

причому знак рівності має місце тільки у випадку $\frac{|x|}{a} = \frac{|y|}{b}$.

Отже, рівність $\frac{|x|}{a} = \frac{|y|}{b}$ має місце в точках еліпса:

$$M_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \quad M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{b}{\sqrt{2}}\right), \quad M_3\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \quad M_4\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

Відповідь: $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right), M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{b}{\sqrt{2}}\right), M_3\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right), M_4\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

3.6.5. Припустимо, що функція $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$ має чотири різних кореня. Оскільки функція $f(x)$ має похідну в кожній точці числової осі, то за теоремою Ролля похідна $f'(x) = e^x - 2ax - b$ матиме не менше трьох коренів. Тоді $f''(x) = e^x - 2a$ має не менше двох нулів, а $f'''(x) = e^x$ має принаймні один нуль – прийшли до протиріччя. Отже, задане рівняння може мати не більше трьох різних розв'язків, що й треба було довести.

3.6.6. Позначимо перший визначник через $\Delta_1(x)$, а другий – $\Delta_2(x)$ і розглянемо ці визначники при $x = 0$ та $x = 1$ відповідно:

$$\Delta_1(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{і} \quad \Delta_2(1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо $f(0) = \Delta_1(0) \cdot \Delta_2(0) = 0$ і $f(1) = \Delta_1(1) \cdot \Delta_2(1) = 0$. Тоді за теоремою Ролля існує точка $c \in (0; 1)$, така, що $f'(c) = 0$. Отже, графік функції $f(x)$ буде мати горизонтальну дотичну в точці $(c; f(c))$, що й треба було довести.

3.6.7. Обчислимо площу фігури, обмеженої графіком функції

$$y = \frac{a^2}{(a^2 + 1)((x + a)^2 + a^2)} \text{ та віссю } Ox:$$

$$S = \frac{a^2}{a^2 + 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x + a)^2 + a^2} = \left\{ \begin{array}{l} x + a = t, \\ dx = dt \end{array} \right\} = \frac{a^2}{a^2 + 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{a^2}{a^2 + 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2}.$$

Враховуючи парність підінтегральної функції, отримаємо:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2a^2}{a^2 + 1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{2a^2}{a^2 + 1} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{2a^2}{a^2 + 1} \cdot \frac{1}{a} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} - \operatorname{arctg} 0 \right] = \\ &= \frac{2a^2}{a^2 + 1} \cdot \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi a}{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

Оскільки $S'(a) = \pi \frac{1 - a^2}{(a^2 + 1)^2}$, то $S(a)$ набуває найбільшого значення в

точці $a = 1$, яке дорівнює $S(1) = \frac{\pi}{2}$, бо $S(a)$ зростає на інтервалі $(0; 1)$ та спадає на інтервалі $(1; \infty)$.

Відповідь: $\max_{(0; \infty)} S = S(1) = \frac{\pi}{2}$.

3.6.8. Система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = kx \end{cases}$ задає еліпс,

отриманий шляхом перерізу кругового циліндра площиною.

Для того, щоб записати рівняння розгортки, оберемо систему координат lOz , де l – довжина дуги кола радіуса R , яка лежить навпроти центрального кута φ : $l = R \cdot \varphi$, $l \in [0; 2\pi R]$.

Тоді координати точки $M(x; y)$ можна записати у вигляді:

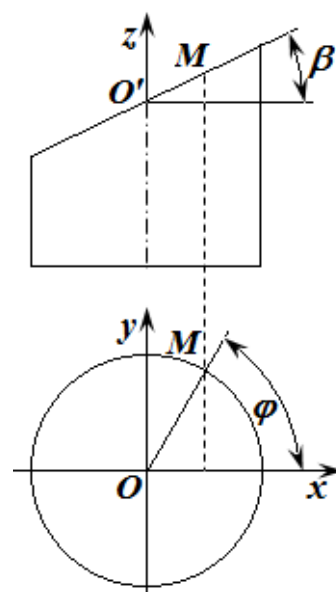


Рис. 100

$$x = R \cos \varphi = R \cos \frac{l}{R}, \quad y = R \sin \varphi = R \sin \frac{l}{R} \quad (\text{рис. 100}).$$

Висота точки M , яка відраховується від рівня точки O' , визначається формулою $z = x \cdot \operatorname{tg} \beta = k \cdot x$. Підставивши в останню формулу замість x вираз із першої формули, отримуємо $z = k \cdot R \cos \frac{l}{R}$. Таким чином, коли точка M “пробігає” всю лінію перетину (еліпс), на розгортці циліндра одержуємо повну хвилю косинусоїди.

Відповідь: повна хвиля косинусоїди $z = k \cdot R \cos \frac{l}{R}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Овчинников П.П. Вища математика / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – Київ : Техніка, 2003, 2004. Ч. I, II.
2. Шкіль М.І. Вища математика: Елементи аналітичної геометрії, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – Київ : Вища шк., 1984. – 391 с.
3. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / за ред. Ю. К. Рудавського. Львів : Бескид Біт, 2002. – 258 с.
4. Вища математика: зб. задач: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; за ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – Київ : А.С.К., 2001. – 480 с.
5. Аналітична геометрія. Ч. 1, 2. Навч.-метод. посіб. / Укл. Ю.В. Яременко, Л.І. Лутченко. – Кіровоград : Антураж А, 2005. – 116 с.
6. Математичні олімпіади школярів України 2001–2006 : навч.-метод. посіб. / Упор. В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Львів : Каменярь, 2008. – 350 с.
7. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В.А. Ясінський. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
8. Українські математичні олімпіади : довідник / В.А. Вишенський, О.Г. Ганюшкін, М.В. Карташов, В.І. Михайловський, Г.Й. Призва, М.Й. Ядренко. – Київ : Вища шк., 1993. – 415 с.
9. Новікова Л.В. Вища математика. Лінійна алгебра [Електронний ресурс] / Л.В. Новікова, Н.П. Уланова, В.В. Приходько. – Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2014. – 92 с.
<https://do.nmu.org.ua/course/view.php?id=81>

10. Уланова Н.П. Вища математика. Аналітична геометрія [Електронний ресурс] / Н.П. Уланова, В.В. Приходько – Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2015. – 93 с.

<https://do.nmu.org.ua/course/view.php?id=187>

11. Вища математика. Початки математичного аналізу [Електронний ресурс] / Н.П. Уланова, В.В. Приходько. Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2014. – 121 с.

<https://do.nmu.org.ua/course/view.php?id=162>

Уланова Наталія Петрівна

Приходько Віра Володимирівна

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичний посібник

В авторській редакції

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.